

Mécanique quantique

08/04/2014

durée du contrôle: 2h

1. Considérons l'hamiltonien

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

d'une particule quantique dans un puit de potentiel

$$V(x) = \begin{cases} -g^2 & \text{pour } |x| \leq a, \\ 0 & \text{pour } |x| > a. \end{cases}$$

- En utilisant la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée en $x = \pm a$, obtenir l'équation qui détermine le spectre des énergies des états liés (avec $-g^2 < E < 0$).
- Montrer (par exemple, graphiquement) que pour $g \rightarrow 0$ il ne reste qu'un seul état lié et trouver l'expression approximative pour son énergie.

2. Considérons une particule en 1D dans un potentiel périodique $V(x)$ vérifiant $V(x+L) = V(x)$.

- Montrer que l'hamiltonien H commute avec l'opérateur de translation $T_L = \exp(L \frac{d}{dx})$. Que peut-on en déduire sur les fonctions propres de H ?
- Trouver l'expression pour l'opérateur inverse T_L^{-1} et l'adjoint $(T_L)^\dagger$. Qu'est-ce qu'on peut dire sur les valeurs propres de T_L ?

3. Soient $\psi_a(x)$, $\psi_b(x)$ deux fonctions propres de l'hamiltonien $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ d'une particule en 1D qui correspondent aux valeurs propres E_a, E_b avec $E_a < E_b$.

- Montrer que

$$(\psi'_a \psi_b - \psi_a \psi'_b)' = (E_b - E_a) \psi_a \psi_b. \quad (0.1)$$

- Soient x_1, x_2 deux noeuds consécutifs de la fonction $\psi_a(x)$ (c'est-à-dire, $\psi_a(x_1) = \psi_a(x_2) = 0$). Montrer que l'intervalle $[x_1, x_2]$ contient au moins un noeud de la fonction $\psi_b(x)$.
Indication: Intégrer (0.1) entre x_1 et x_2 .

4. Soient $|\ell, m\rangle$ la base des états propres communs orthonormés de L^2 et L_z , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} L^2 |\ell, m\rangle &= \ell(\ell+1) |\ell, m\rangle, \\ L_z |\ell, m\rangle &= m |\ell, m\rangle, \end{aligned}$$

avec $\langle \ell, m | \ell', m' \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$.

- Pour quelles valeurs de ℓ, ℓ', m, m' les éléments matriciels

$$\langle \ell, m | L_z | \ell', m' \rangle, \quad \langle \ell, m | L_- | \ell', m' \rangle$$

sont-ils nuls? Pourquoi?

- Calculer explicitement les éléments matriciels non-nuls.