L3 SM	**Université de Tours**	**Année 2013-2014**

Mécanique quantique

08/04/2014 **durée du contrôle: 2h**

1. Considérons l'hamiltonien
$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$
d'une particule quantique dans un puit de potentiel
$$V(x) = \begin{cases} -g^2 & \text{pour } |x| \leq a, \\ 0 & \text{pour } |x| > a. \end{cases}$$
   - En utilisant la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée en $x = \pm a$, obtenir l'équation qui détermine le spectre des énergies des états liés (avec $-g^2 < E < 0$).
   - Montrer (par exemple, graphiquement) que pour $g \to 0$ il ne reste qu'un seul état lié et trouver l'expression approximative pour son énergie.

2. Soient $H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique et P l'opérateur défini par $(P\psi)(x) = \psi(-x)$.
   - Trouver les valeurs propres et décrire les fonctions propres de P. Le spectre de P est-il continu ou discret? dégénéré ou non-dégénéré?
   - Montrer que $[H, P] = 0$. Que peut-on en déduire sur les fonctions propres de H?

3. Soient $|\ell, m\rangle$ la base des états propres communs orthonormés de L^2 et L_z, c'est-à-dire,
$$\begin{aligned} L^2|\ell, m\rangle &= \ell(\ell+1)|\ell, m\rangle, \\ L_z|\ell, m\rangle &= m|\ell, m\rangle, \end{aligned}$$
avec $\langle \ell, m|\ell', m'\rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$.
   - Pour quelles valeurs de ℓ, ℓ', m, m' les éléments matriciels
$$\langle \ell, m|L_z|\ell', m'\rangle, \quad \langle \ell, m|L_-|\ell', m'\rangle$$
sont-ils nuls? Pourquoi?
   - Calculer explicitement les éléments matriciels non-nuls.