TD4

1. Représenter graphiquement le champ vectoriel $\mathbf{E}$ défini par
   - $\mathbf{E}(x,y) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$
   - $\mathbf{E}(x,y) = \mathbf{e}_x + x\,\mathbf{e}_y$
   - $\mathbf{E}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathbf{e}_x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathbf{e}_y$
   - $\mathbf{E}(x,y) = y\,\mathbf{e}_x + \sin x\,\mathbf{e}_y$

2. Associer les fonctions f avec les représentations de leur champ de gradient (voir les diagrammes). Donnez les raisons de votre choix.
   - $f(x,y) = xy$
   - $f(x,y) = x^2 - y^2$
   - $f(x,y) = x^2 + y^2$
   - $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

3. Calculer
   - $\displaystyle\int_C (2 + x^2 y) ds$, où C est le demi-cercle supérieur $x^2 + y^2 = 1$,
   - $\displaystyle\int_C 2x\, ds$, où C se compose de l'arc C_1 de la parabole $y = x^2$ entre $(0,0)$ et $(1,1)$ suivi du segment vertical C_2 qui relie $(1,1)$ à $(1,2)$,
   - $\displaystyle\int_C y^2\, dx + x\, dy$ (intégral d'un champ vectoriel), où a) $C = C_1$ est le segment qui relie $(-5,-3)$ à $(0,2)$ et b) $C = C_2$ est l'arc de la parabole $x = 4 - y^2$ depuis $(-5,-3)$ jusqu'à $(0,2)$,
   - $\displaystyle\int_C y \sin z\; ds$, où C est l'hélice circulaire décrite par les équations $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$,
   - $\displaystyle\int_C ydx + zdy + xdz$, où C se compose du segment C_1 de $(2,0,0)$ à $(3,4,5)$ suivi du segment vertical C_2 de $(3,4,5)$ à $(3,4,0)$,
   - le travail effectué par le champ de forces $\mathbf{F}(x,y) = x^2\mathbf{e}_x - xy\mathbf{e}_y$ pour déplacer un point matériel le long du quart de cercle $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{e}_x + \sin t\mathbf{e}_y$, $t \in [0, \pi/2]$.

4. Soit $\mathbf{E}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,\mathbf{e}_x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{e}_y$. Montrer que $\displaystyle\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ sur tout chemin fermé simple orienté positivement qui entoure l'origine.

TD5

1. Soit **E** un champ vectoriel, donné par son expression en coordonnées cartésiennes:

$$\mathbf{E} = E_x(x,y,z)\mathbf{e}_x + E_y(x,y,z)\mathbf{e}_y + E_z(x,y,z)\mathbf{e}_z.$$

   Trouver l'expression pour **E** en coordonnées cylindriques et sphériques, c'est-à-dire, écrire **E** sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_\rho(\rho,\varphi,z)\mathbf{e}_\rho + E_\varphi(\rho,\varphi,z)\mathbf{e}_\varphi + E_z(\rho,\varphi,z)\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{E} &= E_r(r,\theta,\varphi)\mathbf{e}_r + E_\theta(r,\theta,\varphi)\mathbf{e}_\theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\mathbf{e}_\varphi, \end{aligned}$$

   et exprimer $E_\rho(\rho,\varphi,z)$, $E_\varphi(\rho,\varphi,z)$, $E_z(\rho,\varphi,z)$, $E_r(r,\theta,\varphi)$, $E_\theta(r,\theta,\varphi)$, $E_\varphi(r,\theta,\varphi)$ en fonction de $E_x(x,y,z)$, $E_y(x,y,z)$ et $E_z(x,y,z)$.

2. Trouver la forme des opérateurs différentiels ∇, div, rot et Δ en coordonnées cylindriques et sphériques.