L2 SM	Université de Tours	Année 2014-2015

Méthodes mathématiques pour la physique

13/05/2015 **durée de l'examen: 2h**

1. Soit $\mathcal{Q}$ un quadrilatère dans $\mathbb{R}^2$ ayant pour sommets $A = (-1, -2)$, $B = (-2, 2)$, $C = (2, 1)$, $D = (1, -1)$.
   - Réécrire l'intégrale double $\displaystyle\iint_{\mathcal{Q}} f(x, y)\, dxdy$ en termes d'intégrales itérées.
   - En utilisant le résultat précédent, calculer l'aire de $\mathcal{Q}$.
2. Donnez un exemple d'un champ vectoriel tangent au plan $x + 2y + 3z = 2015$.
3. Soit $\vec{E} = \cos\frac{\pi x}{4} \sin\frac{\pi y}{4}\, \vec{e}_x + \sin\frac{\pi x}{4} \cos\frac{\pi y}{4}\, \vec{e}_y$ un champ vectoriel sur $\mathbb{R}^2$.
   - $\vec{E}$ est-il conservatif? Argumenter la réponse.
   - Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{r}$, où γ note l'arc du cercle $x^2 + y^2 = 2$ qui relie le point $A = (1, 1)$ au point $B = (1, -1)$.
4. Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{E} = 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$ à travers la surface de la demi-sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.
5. En utilisant le théorème de résidus et (si nécessaire) le lemme de Jordan, calculer les intégrales

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(7 - \cos x)^2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\pi x} dx}{x^2 + 1}, \qquad \int_0^\infty \frac{(1 - \cos x)\, dx}{x^2}.$$