L2 SM **Université de Tours** **Année 2012-2013**

Méthodes mathématiques pour la physique

25/04/2013 **durée de l'examen: 2h**

1.
   - Représenter graphiquement le domaine D défini par
   $$D = \Big\{(x,y):\ (|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 \leq 1,\ |x|+|y| \leq 1\Big\}.$$
   - Calculer l'aire de D en utilisant les intégrales doubles, puis vérifier le résultat par calcul géométrique élémentaire.

2. Soient $A = (1,1,0)$, $B = (0,2,2)$, $C = (0,0,1)$ trois points dans $\mathbb{R}^3$.
   - Calculer la circulation $\displaystyle\int \vec{E}\cdot d\vec{r}$ du champ vectoriel $\vec{E} = 2z\,\vec{e}_x - 3x\,\vec{e}_y + 4y\,\vec{e}_z$ le long du chemin fermé $A \to B \to C \to A$ composé de trois segments AB, BC et CA.
   - Calculer le flux $\Phi = \displaystyle\iint_{\Delta ABC} \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS$ du champ vectoriel uniforme $\vec{B} = 4\,\vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y - 3\,\vec{e}_z$ à travers le triangle ABC.
   - Est-ce qu'il y a une relation entre les résultats des deux questions précédentes? Pourquoi?

3.
   - Déterminer les pôles de la fonction $f(z) = \dfrac{1}{\sin^3 z} - \dfrac{1}{z^3}$, ainsi que leurs ordres. Calculer le premier terme non nul dans le développement de Laurent de $f(z)$ autour de $z = 0$.
   - En utilisant le théorème de résidus, calculer l'intégrale
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{7+\cos 2\theta}\,.$$