

## Méthodes mathématiques pour la physique

14/05/2009

durée de l'examen: 2h

1. Calculer la masse d'une plaque homogène de densité surfacique  $\sigma$  dont le bord (dans le plan  $xy$ ) est déterminé par les équations

$$x = ay^4, \quad ax = 2 - ay^2, \quad a > 0.$$

2. Calculer l'intégrale curviligne  $\int_{\gamma} (x + y) dx + (x^2 + y^2) dy$ , où  $\gamma$  est le contour fermé composé du demi-cercle  $\gamma_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0\}$  suivi du segment  $\gamma_2$  qui relie le point  $A = (0, 2)$  au point  $B = (0, -2)$ . ( $\gamma$  est orienté dans le sens positif).

3. Calculer le flux du champ vectoriel  $\vec{E} = yz \vec{e}_x + xz \vec{e}_y + xy \vec{e}_z$  à travers le cadre rectangulaire  $S = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, z = 1\}$ . La direction de la normale à  $S$  est celle de l'axe  $OZ$ .

4. • Déterminer les pôles de la fonction  $f(z) = \frac{z}{(1 - \cos z)^2}$  et leurs ordres.

- Calculer l'intégrale  $\int_C f(z) dz$  le long du cercle  $|z| = 5$ , orienté dans le sens positif.
- En utilisant la méthode de résidus, calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4 \cos \theta + 5 \sin \theta + 9}.$$