

Méthodes mathématiques pour la physique

14/05/2009

durée de l'examen: 2h

1. Calculer la masse d'une plaque homogène de densité surfacique σ dont le bord (dans le plan xy) est déterminé par les équations

$$x = ay^4, \quad ax = 2 - ay^2, \quad a > 0.$$

2. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\gamma} (x + y) dx + (x^2 + y^2) dy$, où γ est le contour fermé composé du demi-cercle $\gamma_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0\}$ suivi du segment γ_2 qui relie le point $A = (0, 2)$ au point $B = (0, -2)$. (γ est orienté dans le sens positif).

3. Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{E} = yz \vec{e}_x + xz \vec{e}_y + xy \vec{e}_z$ à travers le cadre rectangulaire $S = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, z = 1\}$. La direction de la normale à S est celle de l'axe OZ .

4. • Déterminer les pôles de la fonction $f(z) = \frac{z}{(1 - \cos z)^2}$ et leurs ordres.

• Calculer l'intégrale $\int_C f(z) dz$ le long du cercle $|z| = 5$, orienté dans le sens positif.

• En utilisant la méthode de résidus, calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4 \cos \theta + 5 \sin \theta + 9}.$$