

Méthodes mathématiques pour la physique
(examen du 19/06/2008)

1. Estimer la valeur de l'intégrale $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 4} \frac{dx dy dz}{1000 + x + y + z}$ à 5% près.

2. On considère une plaque homogène dont le bord dans le plan xy est déterminé par les équations

$$y = x^2 + ax, \quad y = 2x^2 - 2a^2, \quad a > 0.$$

La plaque est chargée uniformément avec la densité surfacique σ . Calculer la charge totale de la plaque.

3. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma} x dx + y dy + (x + y - 1) dz,$$

où γ est le segment qui relie $(1, 1, 1)$ à $(2, 3, 4)$.

4. Calculer l'intégrale

$$\iint_S x^3 dy dz + y^3 dx dz + z^3 dx dy,$$

où S est la surface de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

(Indication: on pourra utiliser le théorème de flux-divergence).

5. • Déterminer l'ordre du pôle de la fonction $f(z) = \frac{1}{\sin z - \sinh z}$ en $z = 0$. Calculer le résidu de $f(z)$ en $z = 0$.
- En utilisant la méthode de résidus, calculer l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}, \quad a, b > 0, a^2 \neq b^2.$$