

Méthodes mathématiques pour la physique (examen du 05/05/2008)

1. Estimer la valeur de l'intégrale $\iint_{|x|+|y|\leq 10} \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$. Argumentez votre réponse.

2. Calculer la masse d'une plaque homogène de densité surfacique σ dont le bord (dans le plan xy) est déterminé par les équations

$$ay = x^2, \quad x + y = 2a, \quad a > 0.$$

3. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\gamma} x dy$, où γ est le triangle formé par l'intersection de 3 droites: $x = 0$, $y = 0$ et $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. Contour γ est orienté dans le sens positif.

4. Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{E} = (3x + y)\vec{e}_x + (y + 4z)\vec{e}_y + (2x + 5y)\vec{e}_z$ à travers la surface de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Le vecteur normal est orienté vers l'extérieur.

5. • Déterminer l'ordre du pôle de la fonction $f(z) = \frac{1}{\sin z - \operatorname{tg} z}$ en $z = 0$. Calculer le résidu de $f(z)$ en $z = 0$.

• Déterminer les pôles de la fonction $g(z) = \frac{z}{\sin^2 z}$ et leurs ordres. Calculer l'intégrale $\int_C g(z) dz$ le long du cercle $|z| = 1$, orienté dans le sens positif.

• En utilisant la méthode de résidus, calculer l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}.$$