

Méthodes mathématiques pour la physique

07/03/2012

durée du contrôle: 2h

1. Démontrer la formule

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx.$$

Ici $a > 0$ est un paramètre et $f(x, y)$ est une fonction arbitraire, continue sur $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$.

2. Calculer le volume du solide délimité par les surfaces $z = x + y$, $z = 2x + 2y$, $y = x$, $y = x^2$.
3. Calculer l'aire d'intersection du domaine tridimensionnel $V = \{(x, y, z) \mid |y| \leq 1 - x^2\}$ avec le plan d'équation $z = ax + by + c$.
4. Représenter graphiquement le champ vectoriel $\mathbf{E}(x, y) = (x + y)\mathbf{e}_x + (x - y)\mathbf{e}_y$. Existe-t-il une fonction $f(x, y)$ telle que $\mathbf{E} = \nabla f$?
5. Démontrer la formule de Poisson

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f\left(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right) du,$$

où S note la surface de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.