TD6

Exercice 1
Le potentiel créé en point O par une charge Q placée en point A est donné par

$$\varphi_A(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{AO}.$$

Dans notre cas $AO = BO = CO = DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (puisque O est au centre du carré), donc le potentiel total en O est

$$\varphi(O) = \varphi_A(O) + \varphi_B(O) + \varphi_C(O) + \varphi_D(O) == \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{+q - q + 2q - 2q}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)}\right) = 0.$$

Exercice 2
Reconsidérons l'Ex. 5 de TD2, en particulier la Fig. 5 dans son corrigé. La charge dq de l'élément de la surface dS qui correspond à dr et $d\varphi$ est égale à

$$dq = \lambda dS = \lambda r dr\, d\varphi.$$

Donc le potentiel créé par cette charge en point $M = (0, 0, z)$ est donné par

$$d\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{AM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda r dr\, d\varphi}{AM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda r dr\, d\varphi}{\sqrt{r^2+z^2}}.$$

a) Pour calculer le potentiel total en M on somme les contributions de tous les petits élements:

$$\varphi(M) = \int_{disque} d\varphi(M) = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda r}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2+z^2}} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{d(r^2+z^2)}{2\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\int_0^R d(\sqrt{r^2+z^2}) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r^2+z^2}\right]_0^R =$$

$$= (\text{posons } z > 0) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+z^2} - z).$$

b) On sait (en regardant les symétries) que le champ électrique en M est vertical. Donc il suffit de regarder la composante $E_z(M)$ (comme $E_x(M) = E_y(M) = 0$ automatiquement). De plus, $\vec{E} = -\nabla\varphi$. Alors $E_z = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ et on obtient

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+z^2} - z)\right) = -\frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\sqrt{R^2+z^2} - z\Big) =$$

$$= \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right).$$

C'est exactement le résultat qu'on a trouvé dans le TD2 (voir la 2ème ligne des calculs sur la page 9 du corrigé).

Exercice 3.
Considérons un point $M = (x, y, z)$. On obtient

$$\varphi(M) = \varphi_P(M) + \varphi_{P'}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{PM} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{P'M} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2}}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2} - \sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2}\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2} - \sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2}\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2} + \sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2} + \sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x^2+y^2+(z+d/2)^2) - (x^2+y^2+(z-d/2)^2)}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2}\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2} + \sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2zd}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2}\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2} + \sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}} \approx$$

$$\approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2zd}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zd}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Exercice 4.
A priori le potentiel φ est une fonction de x, y, z. On sait que $\vec{E}(x, y, z) = -\nabla\varphi(x, y, z)$ et donc

$$E_x(x, y, z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y, z),$$

$$E_y(x, y, z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y, z),$$

$$E_z(x,y,z) = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z).$$

D'après l'énoncé $E_y(x,y,z) = E_z(x,y,z) = 0$, et donc φ ne dépend pas de y et de z:

$$\varphi(x,y,z) = \varphi(x).$$

On a de plus $E_x(x,y,z) = E$ où E est une constante. Donc

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}(x) \implies \varphi(x) = -Ex + \text{const}.$$

Le plan yOz correspond à $x = 0$, alors on obtient const $= V_0$ et, par conséquent,

$$\varphi(x,y,z) = V_0 - Ex.$$