TD5

Quelques remarques sur la méthodologie:

- On commence par l'analyse des symétries du système des charges donné. En utilisant les plans de symétrie, on peut souvent déterminer la direction du champ électrique en tout point de l'espace. De plus, l'analyse des symétries continues (sphérique, axiale, par rapport aux translations, etc) souvent permet de dire de quelles variables dépend le module du champ.

- Ensuite on choisit une surface S pour le théorème de Gauss. Cette surface doit être <u>fermée</u>. De plus, il faut la choisir "bien": c'est-à-dire, de telle manière qu'on puisse calculer le flux à travers cette surface sans trop d'efforts. En général, le choix est "bon" si la direction de la normale à la surface en tout point coïncide avec la direction du champ ou lui est orthogonal.

- On calcule le flux en utilisant les résultats des deux étapes précédentes. Dans la pluspart des cas, ce flux va dépendre: a) du module (inconnu pour l'instant) du champ électrique b) des paramètres de la surface S choisie.

- On calcule la charge $Q_{int.\,S}$ contenue à l'intérieur de la surface S. Celle-ci va aussi dépendre de la surface S.

- Finalement, il faut comparer les résultats des étapes 3 et 4, en utilisant le théorème de Gauss
$$\Phi = \int \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{Q_{int.\,S}}{\varepsilon_0}\,.$$
Cela nous permettra de trouver le module du champ électrique.

Exercice 1
L'analyse des symétries (ou alors le sens commun) montre que le champ électrique est orthogonal au plan chargé, ses directions au-dessus et au dessous du plan étant opposées. Le module du champ en point M quelconque dépend uniquement de la distance h entre ce point et le plan chargé. On va le noter $E(h)$.

On choisit la surface S du théorème de Gauss comme représenté sur la Fig. 1. Elle est composée de deux parties: S_1 (cotés) et S_2 (haut et bas). Le flux Φ_{S_1} à travers S_1 est égal à 0, puisque le champ électrique est orthogonal au vecteur normal à S_1 en tout point de S_1. Sur S_2 (partie haute et basse), le module du champ reste constant, et sa direction coïncide avec celle de la normale (rappelons que le vecteur de la normale dirige vers l'exterieur de S). Par conséquent, pour le flux Φ_{S_2} on obtient

$$\Phi_{total} = \Phi_{S_2} = \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_2} E(h)\, dS_2 = 2\, E(h)\, S_0,$$

où S_0 note la surface de la partie haute (ou basse) de S_2.

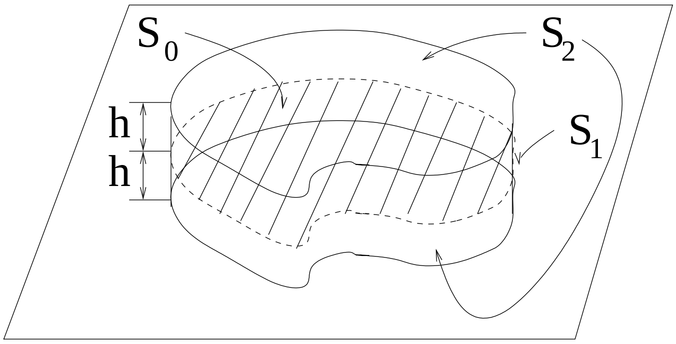

Fig. 1

La charge "découpée" par S est égale à $Q_{int.\,S} = \sigma\, S_0$, donc d'après le théorème de Gauss on doit avoir

$$2E(h)S_0 = \frac{\sigma\, S_0}{\varepsilon_0} \implies E(h) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,.$$

Remarquons qu'en effet le module du champ électrique ne dépend pas de h.

Exercice 2 (si la loi de Coulomb n'existais pas...)
La direction du champ électrique en point M quelconque de l'espace est radiale (coïncide avec la direction de la droite OM) et son module ne dépend que de la distance OM (voir TD4). C'est donc raisonable de choisir pour la surface S du théorème de Gauss la sphère avec le centre en O, de rayon $r = OM$. Les directions de la normale et du champ coïncident en tout point de S, le module $E(r)$ est constant sur S, donc le flux est donné par

$$\Phi = \int_{\text{sphère}} E(r)\, dS = E(r) \int dS = E(r)\, S_{\text{sphère}} = E(r) \cdot 4\pi r^2.$$

D'autre part, d'après le théorème de Gauss, ce flux est égal à la charge contenue à l'intérieur de S (elle coïncide avec notre charge ponctuelle), divisée par ε_0:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \implies E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,.$$

Exercice 3
Les symétries sont les mêmes que dans l'exercice précédent. Alors si on prend pour S une sphère de rayon r ayant le même centre que la sphère chargée, le flux sera égal à

$$\Phi = E(r) \cdot 4\pi r^2. \qquad (*)$$

Par contre, quand on calcule la charge contenue à l'intérieur de la sphère, il faut distinguer 2 cas:

- $r < R \implies Q_{int} = 0,$
- $r > R \implies Q_{int} = Q.$

En utilisant (∗) et le théorème de Gauss ($\Phi = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$), on obtient

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r < R, \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q}{r^2} & \text{pour } r > R. \end{cases}$$

Exercice 4
Les symétries restent encore les mêmes que dans l'Ex. 2 et 3. Donc si on choisit pour S la sphère de rayon r ayant le même centre que la boule creuse, le flux est encore égal à

$$\Phi = E(r) \cdot 4\pi r^2.$$

En calculant la charge contenue à l'intérieur de S, on aura trois cas différents:

- $r < b \implies Q_{int} = 0;$
- $b < r < a \implies Q_{int} = \rho \cdot (V_{\text{sphère de rayon } r} - V_{\text{sphère de rayon } b}) = \rho \cdot \dfrac{4}{3}\pi(r^3 - b^3);$
- $r > a \implies Q_{int} = \rho \cdot (V_{\text{sphère de rayon } a} - V_{\text{sphère de rayon } b}) = \rho \cdot \dfrac{4}{3}\pi(a^3 - b^3).$

Maintenant le théorème de Gauss donne

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r < b, \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} \dfrac{r^3 - b^3}{r^2} & \text{pour } b < r < a, \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} \dfrac{a^3 - b^3}{r^2} & \text{pour } r > a, \end{cases}$$

Question supplémentaire: tracez la fonction $E(r)$.

Exercice 5 (rectificatif de l'enoncé: le cylindre est infini)
En utilisant les symétries, on pourra conclure que la direction du champ électrique en point M quelconque est radiale (est contenue dans le plan qui passe par l'axe OZ du cylindre et le point M, et orthogonale à OZ), et son module ne dépend que de la distance entre M et OZ (à cause de la symétrie axiale).

Pour la surface fermée S du théorème de Gauss on prend un cylindre fini de rayon r et de hauteur h, ayant le même axe que le cylindre chargé (voir le Fig. 2). Le flux à travers les deux cercles en haut et en bas est égal à zéro, puisque la normale à S en tout point de ces deux cercles est parallèle à l'axe du cylindre et donc orthogonale au champ électrique. Sur la partie S' qui reste, le module du champ électrique est constant et sa direction coïncide avec celle du vecteur normal. Alors le flux est

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S'} E(r)\, dS = E(r) \int_{S'} dS = E(r) \cdot 2\pi r h.$$

La charge contenu à l'intérieur de S est égal à:

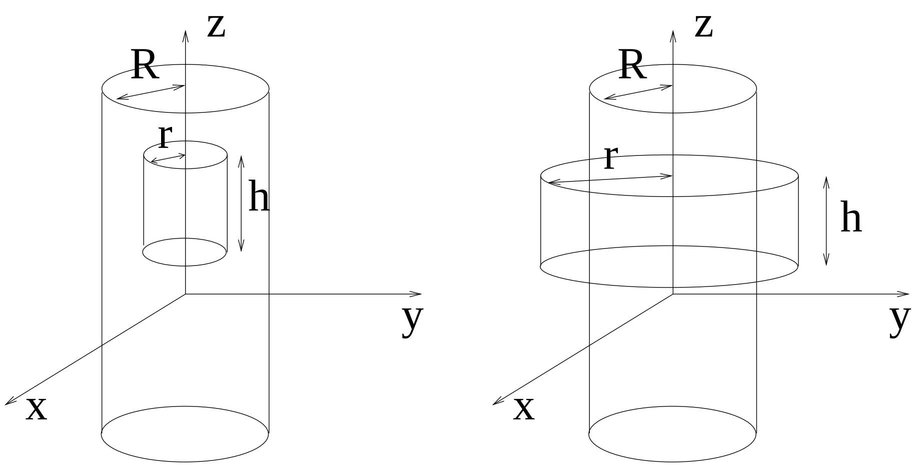

Fig. 2

- $Q_{int} = 0$ pour $r < R$;
- $Q_{int} = \sigma \cdot 2\pi R h$ pour $r > R$.

Alors pour le module du champ électrique on obtient (en utilisant le théorème de Gauss)

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r < R, \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \dfrac{R}{r} & \text{pour } r > R. \end{cases}$$