

Corrigé de TD4

On se donne un système quelconque de charges et un point M dans l'espace. L'analyse des symétries (souvent) permet de dire quelque chose sur le champ électrique en M sans aucun calcul. Cette analyse comporte 2 étapes:

1. La recherche des plans de symétrie (plan de symétrie \implies après la réflexion par rapport à ce plan le système se transforme en soi-même).

Fait de base: si P est un plan de symétrie d'un système de charges qui passe par M , alors le champ électrique en M appartient à P .

Corollaire 1: s'il y a deux plans de symétrie distincts passant par M , alors le champ électrique en M appartient à la droite d'intersection de ces deux plans.

Corollaire 2: s'il y a trois plans de symétrie dont M est le point d'intersection, alors le champ électrique en M est égal à 0.

Certains systèmes de charges admettent des plans d'antisymétrie (après la réflexion le système se transforme en soi-même, mais toutes les charges changent leurs signes). S'il y a un plan P d'antisymétrie qui passe par M , alors le champ électrique en M est orthogonal à P . S'il y a 2 plans d'antisymétrie distincts passant par M , alors le champ en M est nul.

2. La recherche d'autres invariances (symétrie sphérique, cylindrique, axiale, de translation etc).

La première étape permet de dire des choses sur la direction du champ en M , et la deuxième permet de déterminer de quelles variables dépend (ou ne dépend pas) son module. On verra comment ça marche sur les exemples ci-dessous.

Exercice 1.

1. On cherche les plans de symétrie que passent par M . En effet, tout plan qui passe par M et O est un plan de symétrie. Le champ électrique en M doit être contenu dans l'intersection de tous ces plans (la droite OM), ce qui justifie sa direction radiale.
2. On a une symétrie sphérique (les rotations autour de O laissent notre système — la charge Q — sur sa place). Donc le module du champ électrique en M ne dépend que de la distance OM .

Exercice 2. Considérons un point M quelconque.

1. Il y a 2 plans de symétrie qui passent par M : a) celui qui passe par M et l'axe Δ b) le plan qui passe par M et qui est orthogonal à Δ (dessinez!).
Alors la direction du champ électrique en M coïncide avec la direction de la droite d'intersection de ces deux plans et est donc radiale.
2. On a une symétrie cylindrique, donc le module du champ ne dépend que de la distance entre M et l'axe Δ .

Exercice 3. On considère encore un point M quelconque dans l'espace.

1. Il y a un nombre infini des plans de symétrie qui passent par M : ce sont tous les plans orthogonaux au plan chargé, qui passent par M . L'intersection de tous ces plans est donnée par la droite passant par M et orthogonale au plan chargé. Alors la direction du champ en M coïncide avec la direction de cette droite.
2. On a l'invariance par rapport aux translations horizontales (si le plan chargé est horizontal). Donc le module du champ électrique ne dépend que de la distance entre le point M et le plan chargé.

Exercice 4.

a)

1. On a un seul plan de symétrie (il passe par M_1 , par le centre de la spire et est orthogonal au plan OXY). Le champ électrique appartient alors à ce plan.
2. On a une symétrie par rapport aux rotations autour de l'axe OZ . C'est pourquoi en coordonnées cylindriques le module du champ électrique dépend de ρ et de z , mais ne dépend pas de φ .

b)

1. On a 2 plans de symétrie passant par M_2 : celui d'avant et le plan de la spire. Le champ électrique appartient à l'intersection de ces deux plans (la droite OM_2).
2. Dans ce cas $z = 0$, donc le module du champ électrique dépend uniquement de ρ .

c)

1. On a un nombre infini des plans de symétrie passant par M_3 (tous plans passant par l'axe OZ). Le champ électrique appartient à l'intersection de tous ces plans, qui coïncide avec l'axe OZ de la spire.
2. Ici $\rho = 0$, donc le module du champ ne dépend que de z .

d) On a encore un nombre infini des plans de symétrie passant par M_4 : tous les plans qu'on a vu dans la partie c) de cet exercice + le plan OXY de la spire. L'intersection de ces plans est donné par un seul point (M_4), donc le champ électrique en M_4 est nul.