Exercice 1.
a) On a

$$\text{la charge totale } Q \;=\; \text{la longueur } \times \text{ la densité linéique de la charge} =$$
$$= 0.2m \times 20\mu C/m = 4\mu C.$$

b) Ici

$$\text{la charge totale } Q \;=$$
$$= \text{ la surface de la sphère } \times \text{ la densité surfacique } \sigma \text{ de la charge } = 4\pi R^2 \cdot \sigma,$$

et donc $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$.
c) De façon analogue,

$$\text{la charge totale } Q \;=$$
$$= \text{ la volume du cylindre } \times \text{ la densité volumique } \rho \text{ de la charge } = \pi r^2 h \cdot \rho.$$

Exercice 2.
Soit M un point arbitraire dans le plan médiateur. Considérons un autre plan, qui passe par les points A, B, et M. Introduisons dans ce dernier plan les coordonnées cartésiennes x, y comme représenté sur la Fig. 1. (L'intersection de ce plan avec le plan médiateur coïncide avec l'axe OY).

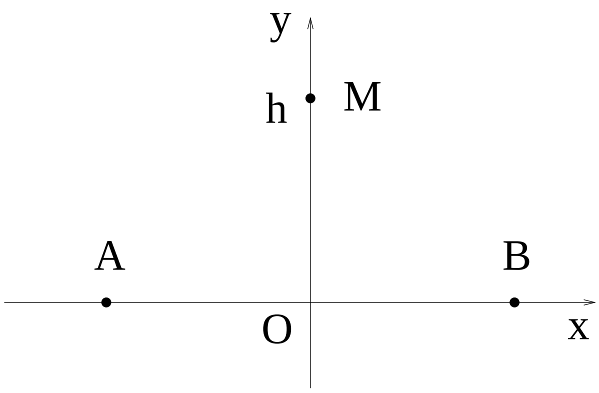

Fig. 1

Soient $(0, h)$ les coordonnées du point M. Calculons le champ électrique $\vec{E}(M)$ en ce point. On sait que

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M),$$

où $\vec{E}_A(M)$ et $\vec{E}_B(M)$ sont les champs électriques, crées en M par la charge $+q$ placée en A, et la charge $-q$ placée en B. Ils sont donnés par

$$\vec{E}_A(M) = k(+q)\,\frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|^3}, \qquad \vec{E}_B(M) = k(-q)\,\frac{\overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{BM}|^3}, \tag{0.1}$$

où $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Notons que les points A et B ont les coordonnées $(-a, 0)$ et $(a, 0)$. Par conséquent, on peut trouver les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= (0, h) - (-a, 0) = (a, h),\\ \overrightarrow{BM} &= (0, h) - (a, 0) = (-a, h).\end{aligned}$$

Les modules de ces deux vecteurs sont egaux:

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{a^2 + h^2},$$

$$|\overrightarrow{BM}| = \sqrt{(-a)^2 + h^2} = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

En remplacant les expressions trouvées pour $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, |\overrightarrow{AM}|, |\overrightarrow{BM}|$ dans (0.1), on obtient

$$\vec{E}_A(M) = \frac{kq}{(a^2 + h^2)^{3/2}}\,(a, h), \qquad \vec{E}_B(M) = -\frac{kq}{(a^2 + h^2)^{3/2}}\,(-a, h).$$

Donc le champ électrique total en M est donné par

$$\vec{E}(M) = \frac{kq}{(a^2 + h^2)^{3/2}}\,(a, h) - \frac{kq}{(a^2 + h^2)^{3/2}}\,(-a, h) = \frac{2kq}{(a^2 + h^2)^{3/2}}\,(a, 0).$$

Ça veut dire que

- le champ électrique en M a la direction horizontal (parallèle à la droite AB),
- son module est $|\vec{E}(M)| = \dfrac{2kqa}{(a^2 + h^2)^{3/2}}$, où h note la distance entre M et le point d'intersection du plan médiateur avec la droite AB.

Exercice 3

Introduisons dans le plan du carré un système de coordonnées cartésiennes comme représenté sur la Fig. 2.

Le centre du carré coïncide avec le point $O(0, 0)$, et ses sommets ont les coordonnées suivantes:

$$\begin{aligned}A_1 &= \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right),\\ A_2 &= \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right),\\ A_3 &= \left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right),\\ A_4 &= \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right).\end{aligned}$$

Le champ électrique en O est donné par la somme des champs $\vec{E}_{A_j}(O)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ des charges placées en $A_1 \ldots A_4$:

$$\vec{E}(O) = \sum_{j=1}^{4} \vec{E}_{A_j}(O).$$

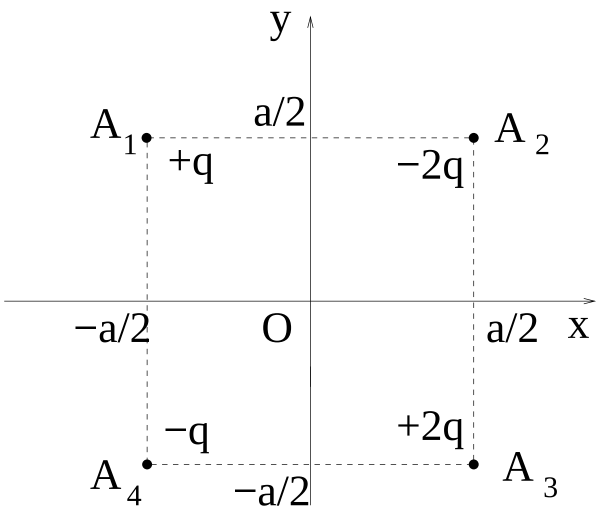

Fig. 2

Ces quatre champs s'écrivent de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{A_1}(O) &= k(+q)\,\frac{\overrightarrow{A_1O}}{|\overrightarrow{A_1O}|^3}, \\
\vec{E}_{A_2}(O) &= k(-2q)\,\frac{\overrightarrow{A_2O}}{|\overrightarrow{A_2O}|^3}, \\
\vec{E}_{A_3}(O) &= k(+2q)\,\frac{\overrightarrow{A_3O}}{|\overrightarrow{A_3O}|^3}, \\
\vec{E}_{A_4}(O) &= k(-q)\,\frac{\overrightarrow{A_4O}}{|\overrightarrow{A_4O}|^3}.
\end{aligned}$$

A partir des coordonnées de O et $A_1 \dots A_4$ on peut déterminer les vecteurs

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_1O} &= \left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right), \\
\overrightarrow{A_2O} &= \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right), \\
\overrightarrow{A_3O} &= \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), \\
\overrightarrow{A_4O} &= \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)
\end{aligned}$$

et leurs modules

$$|\overrightarrow{A_1O}| = |\overrightarrow{A_2O}| = |\overrightarrow{A_3O}| = |\overrightarrow{A_4O}| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Alors pour les champs électriques $\vec{E}_{A_j}(O)$ $(j = 1, \ldots, 4)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{A_1}(O) &= \frac{2\sqrt{2}kq}{a^3}\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right), \\
\vec{E}_{A_2}(O) &= -\frac{4\sqrt{2}kq}{a^3}\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right), \\
\vec{E}_{A_3}(O) &= \frac{4\sqrt{2}kq}{a^3}\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), \\
\vec{E}_{A_4}(O) &= -\frac{2\sqrt{2}kq}{a^3}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, le champ total est donné par

$$\vec{E}(O) = \sum_{j=1}^{4} \vec{E}_{A_j}(O) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}kq}{a^3}\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right) - \frac{4\sqrt{2}kq}{a^3}\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right) + \frac{4\sqrt{2}kq}{a^3}\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) - \frac{2\sqrt{2}kq}{a^3}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}kq}{a^2}(0, 1).$$

Alors sa direction est verticale et son module est égal à $|\vec{E}(O)| = \dfrac{2\sqrt{2}kq}{a^2}$.

Exercice 4

1) On sait calculer le champ électrique créé par les systèmes des charges ponctuelles. Notre tige n'est pas un système de ce type. Dans ce cas, la strategie de la solution est la suivante:

- on décompose notre système (la tige) en petits elements,
- on calcule la charge de chaque element, et le champ électrique qu'il crée (en considérant chaque petit element comme une charge ponctuelle),
- finalement, il faut sommer les contributions au champ électrique de chaque element (en pratique, cela revient à une intégration).

Pour appliquer cette méthode à la tige, considérons un infiniment petit element de sa longueur qui correspond à l'angle $d\varphi$ (voir la Fig. 3). La longueur dl de ce petit element

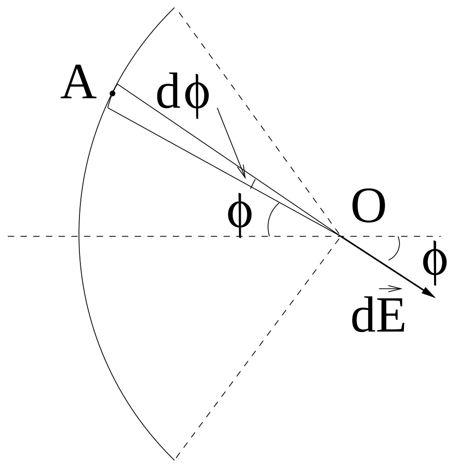

Fig. 3

est égale à $dl = Rd\varphi$, donc sa charge est

$$dq = \lambda dl = \lambda R d\varphi,$$

où λ note la densité linéique de la charge. On pourra calculer cette densité linéique en utilisant le fait que la charge $-Q$ correspond à l'angle $120^\circ = \dfrac{2\pi}{3}$, et donc à la longueur de la tige $l = \dfrac{2\pi R}{3}$. Cela signifie que

$$\lambda = \frac{(-Q)}{\left(\frac{2\pi R}{3}\right)} = -\frac{3Q}{2\pi R},$$

et, par conséquent,

$$dq = -\frac{3Q}{2\pi}\, d\varphi\,. \tag{0.2}$$

Maintenant on remplace notre petit element par une charge ponctuelle dq placée en point A et on calcule le champ électrique $d\vec{E}(O)$ qu'elle crée en O. On obtient

$$d\vec{E}(O) = k\,dq\,\frac{\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AO}|^3} = \frac{k\,dq}{R^3}\,\overrightarrow{AO}\,.$$

La composante horizontale et verticale de ce champ électrique s'obtiennent à partir de celles du vecteur $\overrightarrow{AO}$. Plus précisément, on a

$$AO_h = R\cos\varphi, \qquad AO_v = -R\sin\varphi,$$

et donc

$$dE_h(O) = \frac{k\,dq}{R^2}\,\cos\varphi = -\frac{3kQ}{2\pi R^2}\,\cos\varphi\,d\varphi, \tag{0.3}$$

$$dE_v(O) = -\frac{k\,dq}{R^2}\,\sin\varphi = \frac{3kQ}{2\pi R^2}\,\sin\varphi\,d\varphi. \tag{0.4}$$

Ensuite, pour calculer le champ électrique total on somme (intègre) par rapport à l'angle φ. Remarquons que dans notre cas φ varie entre $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$, donc

$$E_h(O) = \int dE_h(O) = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(-\frac{3kQ}{2\pi R^2}\right)\cos\varphi\,d\varphi = \left(-\frac{3kQ}{2\pi R^2}\right)\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= \left(-\frac{3kQ}{2\pi R^2}\right)\Big[\sin\varphi\Big]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \left(-\frac{3kQ}{2\pi R^2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\frac{3\sqrt{3}\,kQ}{2\pi R^2}\,.$$

et, de façon analogue,

$$E_v(O) = \int dE_v(O) = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\frac{3kQ}{2\pi R^2}\right)\sin\varphi\,d\varphi = \left(\frac{3kQ}{2\pi R^2}\right)\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\sin\varphi\,d\varphi = 0.$$

Remarquons que le champ électrique en O a la direction horizontale (ce qui est logique: le plan horizontal qui passe par O est un plan de symétrie).

2) Tout d'abord on décompose la tige en 2 parties: quart de cercle supérieur (portant la charge $+q$) et inférieur (avec la charge $-q$). Le champ électrique en P est la somme des contributions de ces deux parties:

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_{sup}(P) + \vec{E}_{inf}(P).$$

On va calculer chaque contribution par la méthode exposée ci-dessus. Considerons, par exemple, un petit element de la partie supérieure de la tige, qui correspond à l'angle $d\varphi$ (voir Fig. 4). La densité linéique de la charge dans la partie supérieure est égale à

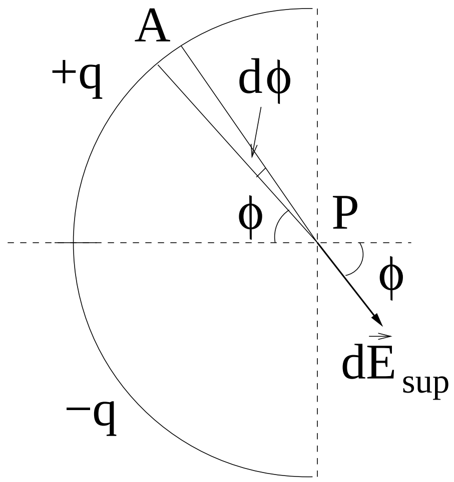

Fig. 4

$$\lambda_{sup} = (\text{comme la longueur d'un quart de cercle} = \pi R/2) = \frac{+q}{(\pi R/2)},$$

la longueur de notre petit element est $dl = Rd\varphi$, et donc sa charge dq est

$$dq = \lambda_{sup} dl = \frac{2q}{\pi}\, d\varphi.$$

Le champ électrique créé par cet element en P est alors

$$d\vec{E}_{sup}(O) = \frac{k\,dq}{|\overrightarrow{AP}|^3}\,\overrightarrow{AP} = \frac{k\,dq}{R^3}\,\overrightarrow{AP}$$

Comme avant, on a

$$AP_h = R\cos\varphi, \qquad AP_v = -R\sin\varphi,$$

et donc

$$dE_{sup,h}(P) = \frac{k\,dq}{R^2}\,\cos\varphi = \frac{2kq}{\pi R^2}\,\cos\varphi\, d\varphi, \tag{0.5}$$

$$dE_{sup,v}(P) = -\frac{k\,dq}{R^2}\,\sin\varphi = -\frac{2kq}{\pi R^2}\,\sin\varphi\, d\varphi. \tag{0.6}$$

Pour obtenir le champ total produit en P par la partie supérieure, il faut intégrer (0.5) et (0.6) par rapport à l'angle φ entre 0 et $\pi/2$. On obtient alors

$$E_{sup,h}(P) = \int dE_{sup,h}(P) = \frac{2kq}{\pi R^2}\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi = \frac{2kq}{\pi R^2},$$

$$E_{sup,v}(P) = \int dE_{sup,v}(P) = -\frac{2kq}{\pi R^2}\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi = -\frac{2kq}{\pi R^2}.$$

Le champ créé par la partie inférieure peut être calculé de façon complétement analogue à la précedente (il suffit de remplacer q par $-q$ et d'intégrer par rapport à φ non pas entre 0 et $\pi/2$, mais entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0). Le résultat (faites ce calcul vous-même) est le suivant:

$$E_{inf,h}(P) = \int dE_{inf,h}(P) = -\frac{2kq}{\pi R^2} \int\limits_{-\pi/2}^{0} \cos\varphi \, d\varphi = -\frac{2kq}{\pi R^2},$$

$$E_{inf,v}(P) = \int dE_{inf,v}(P) = \frac{2kq}{\pi R^2} \int\limits_{-\pi/2}^{0} \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{2kq}{\pi R^2}.$$

Par conséquent, pour le champ total on obtient:

$$E_h(P) = E_{sup,h}(P) + E_{inf,h}(P) = 0,$$

$$E_v(P) = E_{sup,v}(P) + E_{inf,v}(P) = -\frac{4kq}{\pi R^2}\,.$$

Notons que la direction du champ en P est vertical (vers le bas). Cela est encore logique, puisque le plan horizontal qui passe par P est un plan d'antisymétrie de notre système des charges.

Exercice 5

Nous utiliserons la même méthode qu'avant:

- on décompose le système en petits elements
- ensuite on calcule le champ électrique créé par chaque element
- enfin il faut sommer/intégrer toutes les contributions.

Introduisons un système de coordonnées polaires sur le disque comme indiqué sur la Fig. 5. Dans ces coordonnées, l'element dS de la surface qui correspond à dr et $d\varphi$ (voir le dessin) est donné par

$$dS = r dr \, d\varphi,$$

et alors sa charge dq est égale à

$$dq = \sigma \, dS = \sigma \, r dr \, d\varphi.$$

L'analyse des symétries de notre problème indique que le champ électrique en tout point M de l'axe OX a la direction de cette axe (n'importe quel plan passant par l'axe OX est un plan de symétrie du disque; donc il y a une infinité des plans de symétrie, leurs intersection étant l'axe OX; si on prends un point sur cette intersection, le champ électrique en ce point doit appartenir à chaqun des plans de symétrie et donc sa direction coïncide avec celle de l'axe OX). Cela veut dire qu'il suffit de considérer la composante verticale du vecteur de champ en M: la résultante horizontale est égale à zéro par symétrie.

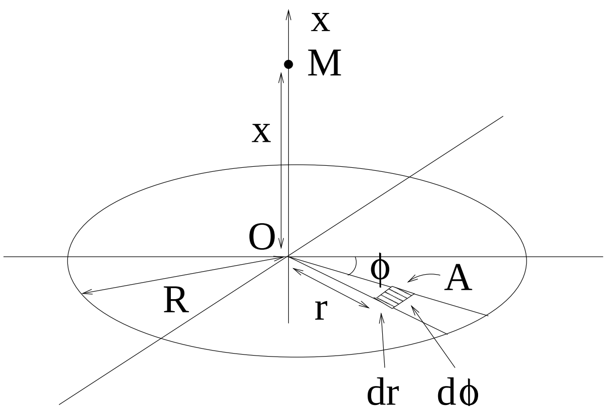

Fig. 5

La composante verticale $dE_x(M)$ du champ créé en M par l'element dS de la surface du disque est donnée par

$$dE_x(M) = \frac{k\,dq}{|\overrightarrow{AM}|^3} \cdot AM_x = \frac{k\,dq}{(x^2+r^2)^{3/2}} \cdot x = k\sigma x\,\frac{r dr\,d\varphi}{(x^2+r^2)^{3/2}}.$$

Pour trouver le champ total, il faut intégrer cette expression sur la surface du disque (donc φ varie entre 0 et 2π, et r varie entre 0 et R):

$$E_x(M) = \int dE_x(M) = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{k\sigma x\,r}{(x^2+r^2)^{3/2}} = 2\pi k\sigma x \int_0^R \frac{rdr}{(x^2+r^2)^{3/2}} =$$

$$= \pi k\sigma x \int \frac{d(r^2+x^2)}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \pi k\sigma x\Big[-2(x^2+r^2)^{-1/2}\Big]_0^R = 2\pi k\sigma x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right) =$$

$$= 2\pi k\sigma\frac{\sqrt{x^2+R^2}-x}{\sqrt{x^2+R^2}} = 2\pi k\sigma\frac{(\sqrt{x^2+R^2}-x)(\sqrt{x^2+R^2}+x)}{\sqrt{x^2+R^2}(\sqrt{x^2+R^2}+x)} =$$

$$= \frac{2\pi k\sigma R^2}{\sqrt{x^2+R^2}(\sqrt{x^2+R^2}+x)}.$$

C'est la formule finale pour le champ électrique en M. Regardons qu'est-ce qu'elle donne dans les cas limites $x \gg R$ et $x \ll R$:
a) Pour $x \gg R$ on pourra négliger R par rapport à x. En particulier, on aura $\sqrt{x^2+R^2} \sim x$ et alors

$$E_x(M) \sim \frac{\pi k\sigma R^2}{x^2} = \frac{kQ}{x^2}.$$

Donc dans cette limite le champ électrique en M coïncide avec le champ d'une charge ponctuelle $Q = \sigma\pi R^2$.
b) Pour $x \ll R$ on pourra négliger x par rapport à R. En particulier, on a $\sqrt{x^2+R^2} \sim R$ et donc

$$E_x(M) \sim 2\pi k\sigma = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,.$$

Alors dans cette regime le champ électrique est très proche au champ du plan infini chargé avec la densité surfacique σ (pour la formule pour le plan infini, voir TD5 sur le théorème de Gauss).