Rappelons la formule de base: si on place une charge q à un point A, alors le champ électrique qu'elle crée en un autre point B est donné par

$$\vec{E}_A(B) = k\frac{q}{AB^2}\,\vec{\mathbf{e}}_{AB},$$

ou $\vec{\mathbf{e}}_{AB}$ désigne le vecteur unitaire (c'est-à-dire, $|\vec{\mathbf{e}}_{AB}| = 1$) dans la direction de $\overrightarrow{AB}$. Il est souvent commode de l'écrire comme

$$\vec{\mathbf{e}}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB},$$

ainsi le champ électrique peut s'écrire aussi sous la forme

$$\vec{E}_A(B) = kq\,\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^3}\ .$$

Dans notre cas, on a trois charges q placées aux points

$$\begin{aligned} A_1 &= (a,0,0), && (0.1)\\ A_2 &= (-a/2, a\sqrt{3}/2, 0), && (0.2)\\ A_3 &= (-a/2, -a\sqrt{3}/2, 0), && (0.3) \end{aligned}$$

et une charge Q placée à un point B sur l'axe OZ. Alors on peut noter

$$B = (0,0,z). \tag{0.4}$$

Le champ électrique créé par les trois charges q en point B, est égale à la somme

$$\vec{E}(B) = \vec{E}_{A_1}(B) + \vec{E}_{A_2}(B) + \vec{E}_{A_3}(B) = kq\left(\frac{\overrightarrow{A_1B}}{A_1B^3} + \frac{\overrightarrow{A_2B}}{A_2B^3} + \frac{\overrightarrow{A_3B}}{A_3B^3}\right). \tag{0.5}$$

Alors il nous faut calculer: $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{A_2B}$, $\overrightarrow{A_3B}$ et A_1B, A_2B, A_3B.
En utilisant (0.1)–(0.4) on trouve

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1B} &= (0,0,z) - (a,0,0) = (-a,0,z),\\ \overrightarrow{A_2B} &= (0,0,z) - (-a/2, a\sqrt{3}/2, 0) = (a/2, -a\sqrt{3}/2, z),\\ \overrightarrow{A_3B} &= (0,0,z) - (-a/2, -a\sqrt{3}/2, 0) = (a/2, a\sqrt{3}/2, z). \end{aligned}$$

Pour les distances A_1B, A_2B, A_3B on obtient

$$\begin{aligned} A_1B^2 &= (-a)^2 + z^2 = a^2 + z^2,\\ A_2B^2 &= (a/2)^2 + (-a\sqrt{3}/2)^2 + z^2 = a^2 + z^2,\\ A_3B^2 &= (a/2)^2 + (a\sqrt{3}/2)^2 + z^2 = a^2 + z^2. \end{aligned}$$

Le fait que $A_1B = A_2B = A_3B = \sqrt{a^2+z^2}$ nous simplifie beaucoup la vie. Notamment, on trouve de la formule (0.5) que

$$\vec{E}(B) = \frac{kq}{(a^2+z^2)^{3/2}}\left(\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_2B} + \overrightarrow{A_3B}\right) =$$

$$= \frac{kq}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,(0,0,3z)\ .$$

Le vecteur force qui agit sur la charge Q est alors

$$\vec{F} = Q\cdot\vec{E}(B) = \frac{3kqQ}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,(0,0,z)\ .$$

Cette force a uniquement la composante z. Cette dernière est nulle pour $z=0$ et pour $z\to\pm\infty$.

Afin de déterminer la valeur de z pour laquelle $|\vec{F}|$ soit maximal, il faut étudier la fonction

$$f(z) = F_z = 3kqQ\,\frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}.$$

Plus précisement, il faut trouver les valeurs de z pour lesquels la première dérivée de cette fonction est égale à 0. On a

$$f'(z) = 3kqQ\left(\frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}\right)' = 3kqQ\frac{1\cdot(a^2+z^2)^{3/2} - z\cdot\frac{3}{2}\cdot(a^2+z^2)^{1/2}\cdot 2z}{(a^2+z^2)^3} =$$

$$= 3kqQ\frac{a^2-2z^2}{(a^2+z^2)^{5/2}}.$$

Donc à partir de $f'(z)=0$ on trouve $z=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Ce sont les points ou $|\vec{F}|$ atteint ses valeurs maximales.

Exercice. Vérifier que ces deux valeurs sont égales.