

TD7

Exercice 1

Dans les deux cas (A et B) on a un circuit de la même forme, représentée sur la Fig. 1. Calculons d'abord le courant (complexe) I pour ce circuit:

$$I = \frac{V_e}{Z_{totale}} = \frac{V_e}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}}.$$

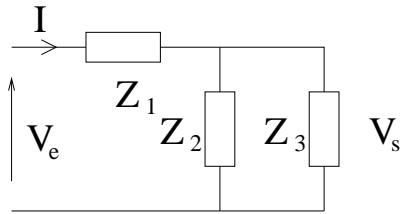


Fig. 1

Ensuite on pourra calculer la tension sur la résistance complexe Z_1 :

$$U_{Z_1} = I Z_1 = V_e \frac{Z_1}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}},$$

ce qui nous permet de trouver la tension V_s :

$$V_s = V_e - U_{Z_1} = V_e \frac{Z_2 Z_3}{Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3}.$$

Par conséquent, la fonction de transfert est donnée par

$$H(\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3}.$$

1. Dans le premier cas (A) $Z_1 = R$, $Z_2 = -\frac{i}{\omega C}$, $Z_3 = i\omega L$, alors

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\frac{RC}{L} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{1 - i\frac{RC}{L} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{1 + \left(\frac{RC}{L} \right)^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

Cela implique

$$G(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{RC}{L} \right)^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im } H(\omega)}{\text{Re } H(\omega)} = -\arctan \frac{RC}{L} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Evidemment, $G(\omega)$ est maximale (égal à 1) pour $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \implies \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Pour tracer le diagramme de Bode, étudions le comportement de $G(\omega)$ pour $\omega \rightarrow 0$ (ce qui est équivalent à $\log \omega \rightarrow -\infty$) et pour $\omega \rightarrow \infty$ (équivalent à $\log \omega \rightarrow \infty$):

- $\underline{\omega \rightarrow 0}$. Comme dans ce cas $\frac{1}{\omega C} \gg \omega L$ et $\frac{1}{\omega C} \gg 1$, alors

$$G(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{RC}{L}\right)^2 \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{\omega L}{R},$$

et donc

$$\log G(\omega) \approx \log \omega + \log \frac{L}{R}.$$

- $\underline{\omega \rightarrow \infty}$. Ici $\omega L \gg \frac{1}{\omega C}$, $\omega L \gg 1$, et par conséquent

$$G(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{RC}{L}\right)^2 \omega^2 L^2}} = \frac{1}{RC\omega}.$$

Cela implique

$$\log G(\omega) \approx -\log \omega - \log RC.$$

Donc le graphe de $10 \log G(\omega)$ en fonction de $\log \omega$ a la forme suivante:

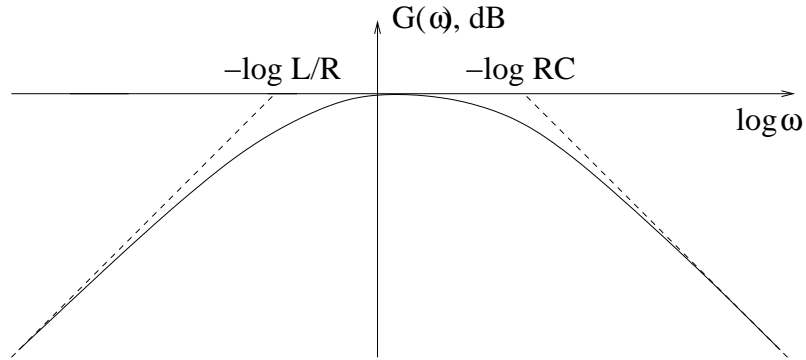


Fig. 2

De façon similaire, on étudie le comportement de $\varphi(\omega)$. Notamment, pour $\omega \rightarrow 0$ on a $\varphi(\omega) \approx \arctan \frac{R}{\omega L} \Rightarrow \varphi(\omega \rightarrow 0) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Aussi, pour $\omega \rightarrow \infty$ on a $\varphi(\omega) \approx -\arctan RC\omega$, et donc $\varphi(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$. Alors le graphe de $\varphi(\log \omega)$ a la forme représentée sur la Fig. 3.

Il est clair qu'on a deux fréquences de coupure. Elles correspondent aux solutions de l'équation

$$10 \log G(\omega) = -3 \Rightarrow G(\omega) \approx 0.501 \Rightarrow \omega_1 \approx 479\text{Hz}, \omega_2 \approx 2782\text{Hz}.$$

Donc la bande passante est $\omega \in (479\text{Hz} \dots 2782\text{Hz})$.

2. Dans le deuxième cas (B), on a $Z_1 = -\frac{i}{\omega C}$, $Z_2 = R$, $Z_3 = i\omega L$. Ça donne

$$H(\omega) = \frac{R \cdot i\omega L}{-\frac{i}{\omega C} (R + i\omega L) + R \cdot i\omega L} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\omega^2 LC} - \frac{i}{\omega RC}},$$

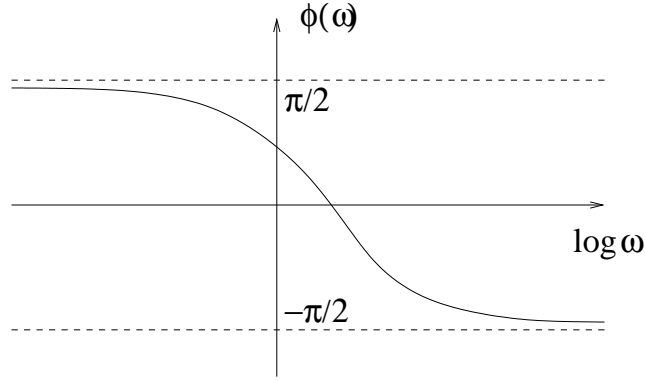


Fig. 3

et donc

$$G(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)^2 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}},$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im } H(\omega)}{\text{Re } H(\omega)} = \arctan \frac{1}{\omega RC \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)}$$

Le gain $G(\omega)$ est maximal quand $f(\omega) = \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)^2 + \frac{1}{(\omega RC)^2}$ est minimal. Deux situations sont possibles: $\frac{L}{2R^2C} > 1$ et $\frac{L}{2R^2C} < 1$ (les valeurs numériques données dans l'exercice correspondent à ce deuxième cas). Dans le premier cas, la valeur minimale de $f(\omega)$ correspond à $\omega_0 \rightarrow \infty$, et dans le deuxième cas — à $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC \left(1 - \frac{L}{2R^2C}\right)}}$.

Pour tracer le diagramme de Bode, on étudie encore le comportement de $G(\omega)$ pour $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$.

- $\omega \rightarrow 0$. Ici $G(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega^4 L^2 C^2}}} = \omega^2 LC$ et donc

$$\log G(\omega) \approx 2 \log \omega + \log LC.$$

- $\omega \rightarrow \infty$. Dans ce cas, $G(\omega) \approx 1$ et alors

$$\log G(\omega) \approx 0.$$

Par conséquent, le graphe de $10 \log G(\omega)$ en fonction de $\log \omega$ peut être représenté comme indiqué sur la Fig. 4.

Aussi, pour $\omega \rightarrow 0$ on a $\varphi(\omega) \approx -\arctan \frac{\omega L}{R}$, et alors $\varphi(\omega \rightarrow 0) \rightarrow -\pi$ (pour voir pourquoi ce n'est pas $\varphi \rightarrow 0$, il faut calculer $\sin \varphi(\omega)$, ensuite remarquer que $\sin \varphi(\omega) > 0$ pour tout ω et que $\tan \varphi(\omega) < 0$ pour ω suffisamment petites). De

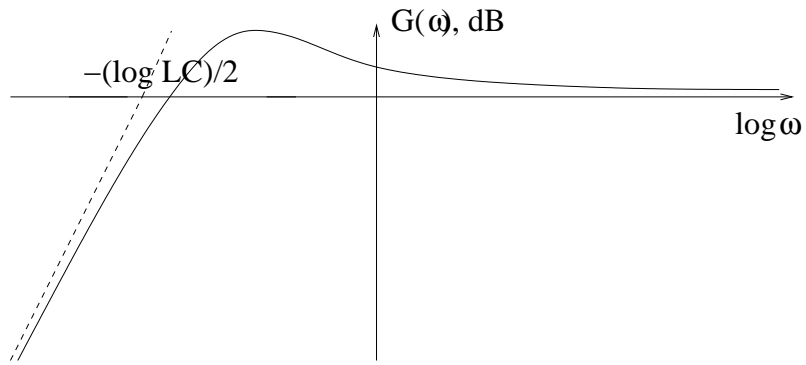


Fig. 4

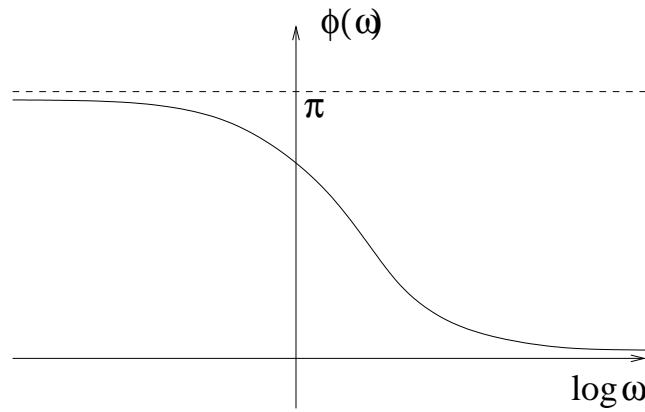


Fig. 5

façon analogue, pour $\omega \rightarrow \infty$ on a $\varphi(\omega) \approx \arctan \frac{1}{\omega RC}$ et donc $\varphi(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Le graphe de $\varphi(\log \omega)$ est alors de la forme représentée sur la Fig. 5.

On voit de la Fig. 4 qu'à -3dB il y aura une seule fréquence de coupure. Comme dans la partie A, elle correspond à la solution de l'équation $G(\omega) \approx 0.501$, ce qui donne $\omega_c \approx 798\text{Hz}$. Alors la bande passante est $\omega \in (798\text{Hz} \dots \infty)$.