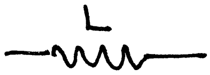
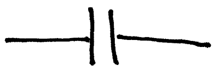
Correction Electrocinétique

Résistances complexes (régime sinusoïdale) :

R



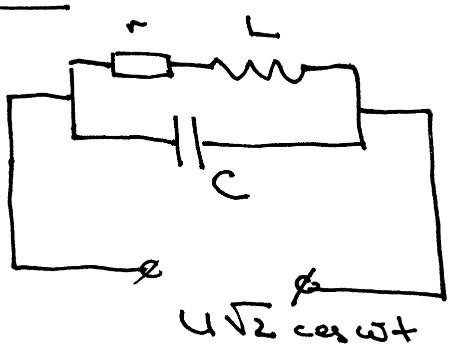
$i\omega L$



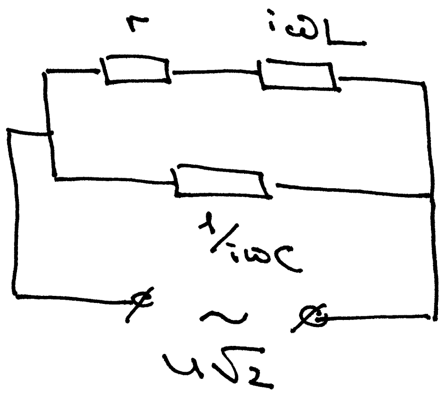
$\frac{1}{i\omega C}$

TD 5

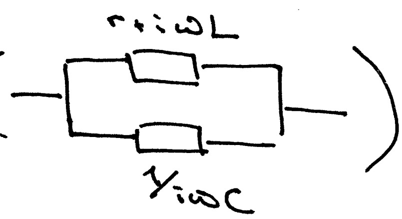
Ex. 2A.



$\Longrightarrow$



1). Résistance totale

$Z = Z\Big($  $\Big) = \dfrac{(r+i\omega L)\frac{1}{i\omega C}}{r+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}}$

et donc l'amplitude complexe I_A du courant principal

$$I_A = \frac{U\sqrt{2}}{Z} = \frac{U\sqrt{2}\left(r+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}\right)}{(r+i\omega L)\frac{1}{i\omega C}}$$

Amplitude réelle :

$$I_{max} = |I_A| = U\sqrt{2}\,\frac{\left|r+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right|}{|r+i\omega L|\cdot\frac{1}{\omega C}} = U\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}{\sqrt{r^2+\omega^2L^2}\cdot\frac{1}{\omega C}}$$

Intensité efficace :

$$I = I_{max}/\sqrt{2} = U\,\frac{\sqrt{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}{\sqrt{r^2+\omega^2L^2}\cdot\frac{1}{\omega C}}.$$

Pour déterminer le déphasage, il faut mettre I_A sous la forme $I_A = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{a}} + i \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{b}}$, alors $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.

Dans notre cas

$$I_A = U\sqrt{2}\, \frac{\left(r + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) \cdot i\omega C}{r + i\omega L} \cdot \frac{r - i\omega L}{r - i\omega L} =$$

$$= \frac{U\sqrt{2}}{r^2 + \omega^2 L^2}\, \omega C \cdot i\left(r + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)(r - i\omega L) =$$

$$= \frac{U\sqrt{2}}{r^2 + \omega^2 L^2}\, \omega C \cdot i\left[\left(r^2 + \omega L\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) + ir\left(\cancel{\omega L} - \frac{1}{\omega C} - \cancel{\omega L}\right)\right]$$

$$= \frac{U\sqrt{2}}{r^2 + \omega^2 L^2}\, \omega C \cdot i\left[\left(r^2 + \omega L\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) - \frac{ir}{\omega C}\right] =$$

$$= \frac{U\sqrt{2}}{r^2 + \omega^2 L^2}\, \omega C \cdot \left[\frac{r}{\omega C} + i\left(r^2 + \omega L\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)\right]$$

et par conséquent

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{r^2 + \omega L\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{r/\omega C}$$

2). Intensité efficace I sera minimale quand

$$f(C) = \frac{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{r^2 + \omega^2 L^2} \cdot \omega^2 C^2 = \frac{r^2 + \omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}}{r^2 + \omega^2 L^2}\, \omega^2 C^2 =$$

$$= \frac{(r^2 + \omega^2 L^2)\,\omega^2 C^2 - 2\omega^2 L C + 1}{r^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{est minimale}$$

$$f'(C) = \frac{2(r^2 + \omega^2 L^2)\,\omega^2 C - 2\omega^2 L}{r^2 + \omega^2 L^2} = 0 \Longrightarrow C_0 = \frac{L}{r^2 + \omega^2 L^2}$$

Notons que pour cette valeur de C on a

$$r^2+\omega L\left(\omega L-\frac{1}{\omega C_0}\right)=r^2+\omega^2L^2-\frac{L}{C_0}=r^2+\omega^2L^2-\frac{L}{L/(r^2+\omega^2L^2)}=$$

$$=(r^2+\omega^2L^2)-(r^2+\omega^2L^2)=0\ !$$

et donc la partie imaginaire de I_A devient nulle, ce qui signifie qu'il n'y a pas de déphasage entre U et I_A $\longrightarrow$ le circuit est équivalent à une résistance pure. En effet, dans ce cas :

$$I_A\Big|_{C=C_0}=\frac{U\sqrt{2}}{r^2+\omega^2L^2}\cancel{\omega C_0}\cdot\frac{r}{\cancel{\omega C_0}}=\frac{U\sqrt{2}\;r}{r^2+\omega^2L^2}$$

donc cette résistance R est égale à

$$R=\frac{U\sqrt{2}}{I_A\big|_{C=C_0}}=\frac{r^2+\omega^2L^2}{r}=\frac{L/C_0}{r}$$

Remarque : on peut trouver L en fonction de r et C_0 :

$$\omega^2C_0L^2-L+r^2C_0=0$$

$$\Delta=1-4r^2C_0^2\omega^2$$

$$L=\frac{1\pm\sqrt{1-4r^2\omega^2C_0^2}}{2\omega^2C_0}\Longrightarrow R=\frac{1\pm\sqrt{1-4r^2\omega^2C_0^2}}{2\omega^2C_0^2\,r}$$

3). Supposons que $r\to 0$, alors

- $I_A=\dfrac{U\sqrt{2}}{\omega^2L^2}\cdot\omega C\cdot i\,\omega L\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)=\dfrac{U\sqrt{2}\,C}{L}\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)$
- Le déphasage est alors égal à

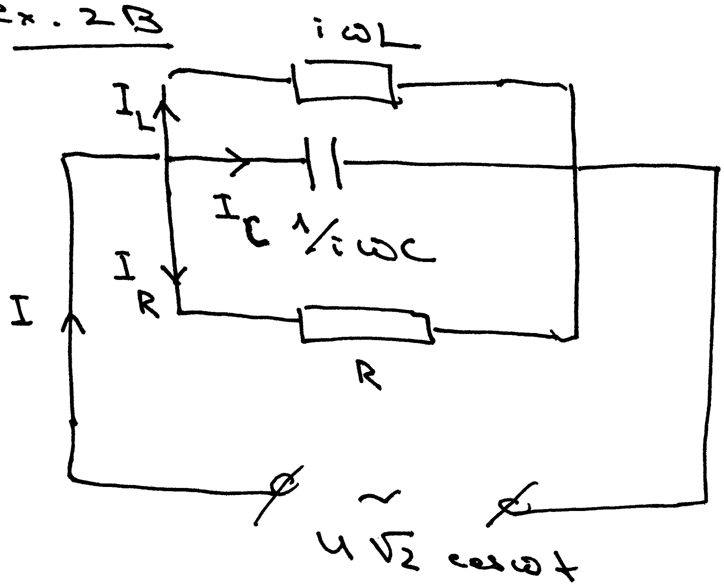
  $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ si $\omega L>\dfrac{1}{\omega C}$

  $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ si $\omega L<\dfrac{1}{\omega C}$
- L'intensité I est minimale pour $C_0=\dfrac{1}{\omega^2L}$. Dans ce cas, $I=0$

• Aussi, dans ce cas $R \to \infty$

Les deux dernières propriétés justifient le nom "circuit bouchon" (le courant ne passe pas).

<u>Ex. 2B</u>



Résistance totale:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

Ainsi on peut calculer le courant principal:

$$I = \frac{U\sqrt{2}}{Z} = U\sqrt{2}\left(\frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right)$$

D'autre part

$$U\sqrt{2} = I_L \cdot i\omega L \Rightarrow I_L = \frac{U\sqrt{2}}{i\omega L}$$

amplitud complexe

et donc

1). Le facteur de surintensité

$$G_L = \left|\frac{I_L}{I}\right| = \left|\frac{1}{i\omega L} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}\right| =$$

$$= \frac{1}{\omega L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{R^2} + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

2). Le facteur de surintensité sera maximal quand

$f(\omega) = (\omega^2 LC - 1)^2 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}$ est minimale. Alors:

$$f'(\omega) = 2(\omega^2 LC - 1) \cdot 2\omega LC + 2\omega \frac{L^2}{R^2} =$$

$$= 2\omega\left\{ 2L^2C^2\omega^2 - 2LC + \frac{L^2}{R^2}\right\} = 0 \Rightarrow \omega_L^2 = \frac{2LC - \frac{L^2}{R^2}}{2L^2C^2}$$

Deux cas alors se distinguent :

I] $2LC \geqslant \frac{L^2}{R^2}$ (condition d'existence de maximum)

$$\omega_L^2 = \frac{2LC - \frac{L^2}{R^2}}{2L^2C^2}$$

$$(G_L)_{max} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega_L^2 L^2}{R^2} + (\omega_L^2 LC - 1)^2}} =$$

$$= \left(\frac{[2LC - L^2/R^2]}{2L^2C^2}\frac{L^2}{R^2} + \left(\frac{\cancel{2LC} - L^2/R^2}{2L^2C^2} LC - \cancel{1}\right)^2 \right)^{-1/2} =$$

$$= \left(\frac{[2LC - L^2/R^2]}{2L^2C^2}\frac{L^2}{R^2} + \frac{L^2}{4R^4C^2} \right)^{-1/2} =$$

$$= \left(\frac{4LC - L^2/R^2}{4\cancel{L^2}C^2} \cdot \frac{\cancel{L^2}}{R^2} \right)^{-1/2} = \frac{2RC}{\sqrt{4LC - L^2/R^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2LC - L^2/R^2}{2LC}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{L^2/R^2}{2LC}\right)^2}}$$

II] $2LC < \frac{L^2}{R^2}$ (maximum local n'existe pas)

Ici la valeur minimale de $f(\omega)$ correspond à $\omega = 0$, et donc

$$(G_L)_{max} = G_L(\omega = 0) = 1.$$

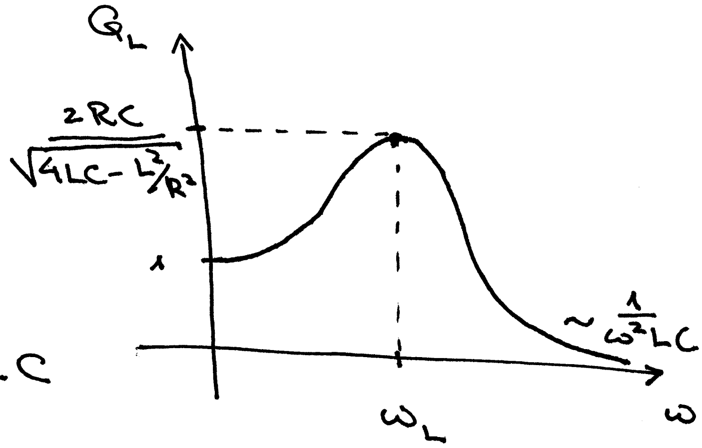
3). Allure du graphe.

I| $2LC \geq \frac{L^2}{R^2}$

$\omega \to 0 \Rightarrow Q_L \to 1$

$\omega \to \infty \Rightarrow Q_L \sim \frac{1}{\omega^2 LC}$

$(Q_L)_{max} = \frac{2RC}{\sqrt{4LC - L^2/R^2}}$

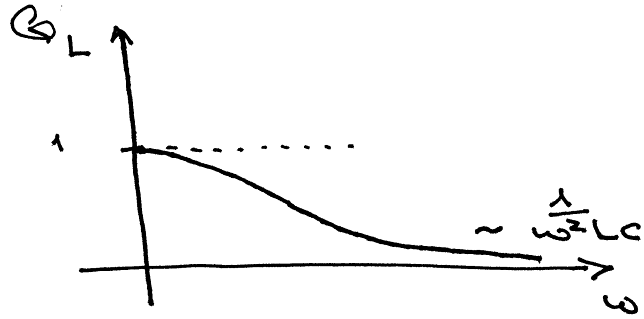


$\omega_L = \sqrt{\frac{2LC - L^2/R^2}{2L^2C^2}}$

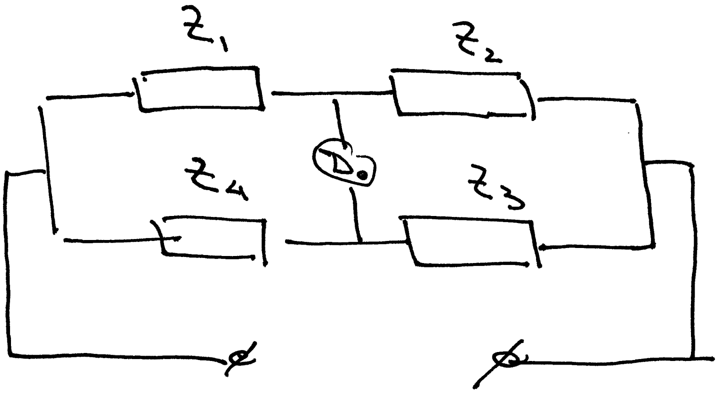
II| $2LC < \frac{L^2}{R^2}$

$\omega \to 0 \Rightarrow Q_L \to 1$ (max.)

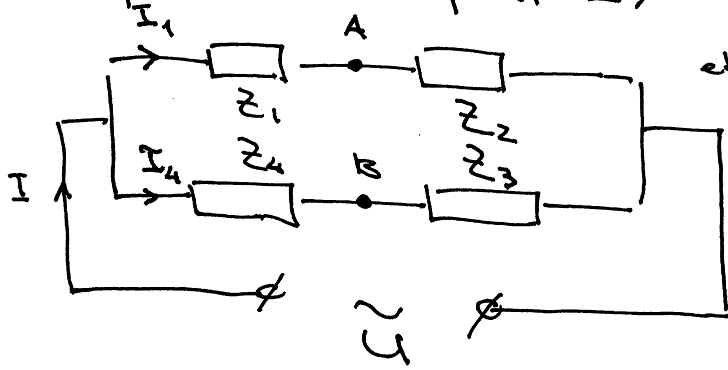
$\omega \to \infty \Rightarrow Q_L \sim \frac{1}{\omega^2 LC}$



Ex. 3|



1). Equilibre du pont $\Rightarrow$ on considère un nouveau schéma et on impose $\varphi_A = \varphi_B$



$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{U}{Z_1+Z_2} \\ I_4 &= \frac{U}{Z_3+Z_4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_A - \varphi_B = I_1 Z_1 - I_4 Z_4 =$$

$$= U\left(\frac{Z_1}{Z_1+Z_2} - \frac{Z_4}{Z_3+Z_4}\right) =$$

$$= \frac{U(Z_1Z_3 - Z_2Z_4)}{(Z_1+Z_2)(Z_3+Z_4)} = 0 \Rightarrow$$

$\Longrightarrow$ condition d'équilibre $Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4$.

2). $$Z_1 = R_1 + \frac{1}{i\omega C_1}$$

$$Z_2 = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{i\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{i\omega C_2}}$$

$$Z_3 = R_3, \quad Z_4 = R_4$$

$$\Rightarrow \left(R_1 + \frac{1}{i\omega C_1}\right) \cdot R_3 = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{i\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{i\omega C_2}} \cdot R_4$$

a). 1 équation complexe $\Longrightarrow$ 2 équations réelles

$$\left(R_1 - \frac{i}{\omega C_1}\right)\left(R_2 - \frac{i}{\omega C_2}\right) R_3 = -\frac{R_2 R_4}{\omega C_2} \cdot i$$

$$\left\{\left(R_1 R_2 - \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}\right) - i\left(\frac{R_1}{\omega C_2} + \frac{R_2}{\omega C_1}\right)\right\} R_3 = -\frac{R_2 R_4}{\omega C_2} i$$

$$\begin{cases} R_1 R_2 = \dfrac{1}{\omega^2 C_1 C_2} & \longrightarrow \text{ seule valeur } \boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}} \\ \left(\dfrac{R_1}{C_2} + \dfrac{R_2}{C_1}\right) \dfrac{R_3}{\cancel{\omega}} = \dfrac{R_2 R_4}{\cancel{\omega} C_2} & \Longrightarrow \dfrac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{C_1 \cancel{C_2}} R_3 = \dfrac{R_2 R_4}{\cancel{C_2}} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$R_1 R_3 C_1 + R_2 R_3 C_2 = R_2 R_4 C_1$$

b). $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C \Longrightarrow \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{RC}}$

en variant R et C, et en déterminant la position d'équilibre, on peut trouver ω.

à condition $2RR_3 = RR_4 \Longrightarrow 2R_3 = R_4$

3). $\begin{cases} Z_1 = i\omega L_1 + R_1 \\ Z_2 = R_2 \\ Z_3 = \dfrac{R_3 \cdot \frac{1}{i\omega C_3}}{R_3 + \frac{1}{i\omega C_3}} \\ Z_4 = R_4 \end{cases}$

Condition d'équilibre :

$$(i\omega L_1 + R_1)\,\frac{R_3 \cdot \frac{1}{i\omega C_3}}{R_3 + \frac{1}{i\omega C_3}} = R_2 R_4$$

$$\Downarrow$$

$$(i\omega L_1 + R_1)\,R_3 = R_2 R_4 (i\omega C_3 R_3 + 1)$$

$$\Downarrow$$

en prenant la partie réelle et imaginaire

$$\begin{cases} R_1 R_3 = R_2 R_4 \\ \cancel{\omega} L_1 \cancel{R_3} = \cancel{\omega} C_3 R_2 \cancel{R_3} R_4 \end{cases} \begin{matrix} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} R_1 = \dfrac{R_2 R_4}{R_3} \\ L_1 = C_3 R_2 R_4 \end{matrix}}$$