**TD4 (Ex. 4 et 5)**

**Exercice 4**
La balance des tensions a la forme suivante (voir Fig. 1):

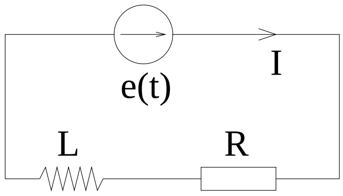


Fig. 1

$$U_L + U_R = e(t) \implies L\frac{dI}{dt} + IR = e(t). \tag{0.1}$$

Considérons maintenant cette équation différentielle dans les intervalles différentes.

$0 < t < \dfrac{T}{2}$ :

1. On sait que pour $0 < t < \dfrac{T}{2}$ la tension du générateur est une fonction linéaire de temps, donc $e(t) = \alpha t$. Pour déterminer la constante $\alpha$, notons que $e(t = T/2) = E_m$. Alors
$$E_m = \alpha\frac{T}{2} \implies \alpha = \frac{2E_m}{T},$$
et donc on peut re-écrire (0.1) sous la forme de l'équation différentielle suivante:
$$L\frac{dI}{dt} + IR = \frac{2E_m}{T}\,t. \tag{0.2}$$

2. La solution générale de l'équation homogène, qui correspond à (0.2) a été construite dans l'Ex. 2:
$$I_{hom}(t) = C\,e^{-\frac{R}{L}\,t} = C\,e^{-t/\tau}.$$
On cherche ensuite une solution particulière de l'équation non-homogène sous la forme d'un polynome d'ordre 1:
$$I_{part.non-hom.} = \beta t + \gamma,$$
où $\beta$ et $\gamma$ sont pour l'instant inconnus. En substituant la dernière expression dans l'équation (0.2), nous obtenons
$$L\beta + R(\beta t + \gamma) = \frac{2E_m}{T}\,t,$$

d'où $\beta = \frac{2E_m}{RT}$, $\gamma = -\frac{2E_m L}{R^2 T}$. Donc la solution générale de l'équation (0.2) s'écrit sous la forme

$$I(t) = C\,e^{-t/\tau} + \frac{2E_m t}{RT} - \frac{2E_m L}{R^2 T} = C\,e^{-t/\tau} + \frac{2E_m(t-\tau)}{RT}$$

Les conditions initiales ($I(t=0)=0$) impliquent

$$C - \frac{2E_m\tau}{RT} = 0 \implies C = \frac{2E_m\tau}{RT}\,.$$

Par conséquent, notre solution a la forme suivante:

$$I(t) = \frac{2E_m\tau}{RT}\,e^{-t/\tau} + \frac{2E_m(t-\tau)}{RT} = \frac{2E_m t}{RT} - \frac{2E_m\tau}{RT}\,(1-e^{-t/\tau})$$

Notons $I_{T/2}$ la valeur du courant à l'instant $t = T/2$:

$$I_{T/2} = \frac{E_m}{R} - \frac{2E_m\tau}{RT}\,(1-e^{-T/2\tau}).$$

Cette valeur nous servira comme une condition initiale pour l'étape suivante.

$\frac{T}{2} < t < T$ :

1. Dans cette intervalle, $e(t) = 0$, et donc la balance des tensions donne l'équation différentielle suivante:
$$L\frac{dI}{dt} + IR = 0 \tag{0.3}$$
2. La solution générale de cette équation est donnée par
$$I(t) = \tilde{C}\,e^{-t/\tau}.$$
On pourra déterminer la constante $\tilde{C}$ en utilisant les conditions initiales ($I(t = T/2) = I_{T/2}$). Ça donne
$$\tilde{C}\,e^{-T/2\tau} = I_{T/2} \implies \tilde{C} = I_{T/2}\,e^{T/2\tau},$$
et donc la solution qui nous intéresse s'écrit comme
$$I(t) = I_{T/2}\,e^{-(t-T/2)/\tau}.$$

L'analyse effectuée ci-dessus montre que

$$U_R(t) = IR = \begin{cases} \frac{2E_m t}{T} - \frac{2E_m\tau}{T}\,(1-e^{-t/\tau}) & \text{pour } 0 < t < T/2, \\ I_{T/2}R\,e^{-(t-T/2)/\tau} & \text{pour } T/2 < t < T, \end{cases}$$

$$U_L(t) = L\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \dfrac{2E_mL}{RT}(1-e^{-t/\tau}) = \dfrac{2E_m\tau}{T}(1-e^{-t/\tau}) & \text{pour } 0 < t < T/2, \\ = -\dfrac{LI_{T/2}}{\tau}\, e^{-(t-T/2)/\tau} = -I_{T/2}R\, e^{-(t-T/2)/\tau} & \text{pour } T/2 < t < T. \end{cases}$$

Les graphes de ces fonctions ($U_R(t)$ et $U_L(t)$) sont représentés sur la Fig. 2. De plus, on voit que les valeurs maximales de $U_R(t)$ et $U_L(t)$ sont données par

$$U_{R,max} = U_R(t = T/2) = I_{T/2}R = E_m - \frac{2E_m\tau}{T}\,(1 - e^{-T/2\tau}),$$

$$U_{L,max} = U_L(t = T/2 - 0) = \frac{2E_m\tau}{T}\,(1 - e^{-T/2\tau}).$$

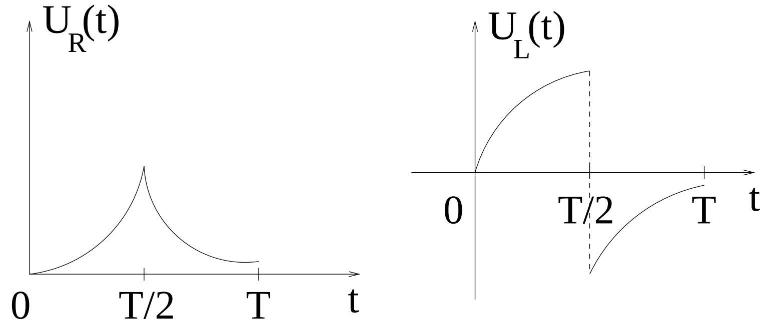


Fig. 2

**Exercice 5**

1ère étape:

La tension aux bornes du condensateur coïncide avec la d.d.p. aux bornes de la lampe. A l'instant initiale, cette tension est égale à zéro. Quand on ferme l'interrupteur K, le condensateur commence à se charge, et la tension sur ces bornes augmente. La lampe n'est pas allumée, donc sa résistance est infinie, alors on peut l'enlever complétement. Ça nous donne le schéma représenté sur la Fig. 3.

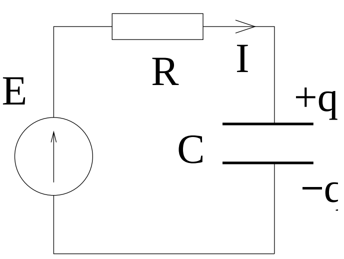


Fig. 3

Ecrivons la balance des tensions:

$$E = U_R + U_C = IR + \frac{q}{C} \implies R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E. \tag{0.4}$$

L'équation caractéristique s'écrit sous la forme $R\lambda + 1/C = 0$, donc $\lambda = -\frac{1}{RC}$ et la solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$q_{hom}(t) = \text{const} \cdot e^{-t/(RC)}.$$

On cherche une solution particulière de (0.4) sous la forme d'une fonction constante: $q(t) = D$. Cela nous donne une équation pour $D$:

$$\frac{D}{C} = E \implies D = EC.$$

Donc la solution générale de (0.4) est

$$q(t) = CE + \text{const} \cdot e^{-t/(RC)}.$$

En appliquant les conditions initiales ($q(t = 0) = 0$) on pourra déterminer la valeur de la constante inconnue

$$0 = CE + \text{const} \implies \text{const} = -CE,$$

et la solution qui correspond à notre cas:

$$q(t) = CE(1 - e^{-t/(RC)}).$$

Finalement, pour la tension sur le condensateur (et sur la lampe) on obtient

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} = E(1 - e^{-t/(RC)}). \tag{0.5}$$

<u>2ème étape:</u>
On voit de l'équation (0.5) que la tension sur le condensateur augmente. Par contre, une fois qu'elle atteigne la valeur $U_C = V_a$, la lampe s'allume et ensuite on doit considérer le schéma représenté sur la Fig. 4 (on suppose que la résistance de la lampe n'est pas négligeable).

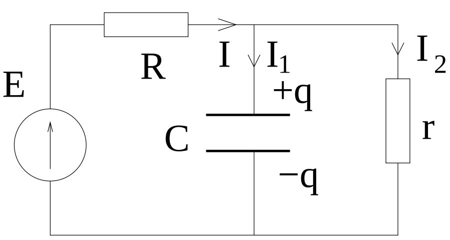


Fig. 4

On a:

- une équation de Kirchoff:

$$I = I_1 + I_2,$$

- 2 équations de maille:

$$E = IR + I_2 r,$$
$$\frac{q}{C} = I_2 r,$$

- une relation entre $I_1$ et $q$:

$$I_1 = \frac{dq}{dt}.$$

Deux dernières équations permettent d'exprimer $I_1$ et $I_2$ en fonction de $q$. Ensuite on pourra utiliser l'équation de Kirchhoff pour exprimer $I$ de façon analogue:

$$I = \frac{dq}{dt} + \frac{q}{rC}.$$

Finalement, en substituant cette expression dans la première équation de maille, on obtient

$$E = R\left(\frac{dq}{dt} + \frac{q}{rC}\right) + \frac{q}{C} \implies$$
$$\implies \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}\frac{r+R}{rR} = \frac{E}{R}.$$

On a obtenu une équation différentielle non-homogène de première ordre. La solution générale de l'équation homogène correspondante est donnée par

$$q_{hom}(t) = \text{const} \cdot e^{-\frac{r+R}{rR}\frac{t}{C}}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme d'une fonction constante: $q_{part.n-h.}(t) = D$. Cette constante doit vérifier l'équation

$$\frac{D}{C}\frac{r+R}{rR} = \frac{E}{R} \implies D = CE\,\frac{r}{r+R}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation non-homogène s'écrit sous la forme

$$q(t) = CE\,\frac{r}{r+R} + \text{const} \cdot e^{-\frac{r+R}{rR}\frac{t}{C}},$$

et donc

$$U_C(t) = E\,\frac{r}{r+R} + \frac{\text{const}}{C} \cdot e^{-\frac{r+R}{rR}\frac{t}{C}}. \tag{0.6}$$

Pour déterminer la valeur de la constante inconnue, il faut appliquer les conditions initiales. On pourra trouver ces conditions de la manière suivante:

- On sait que le fonctionnement du deuxième schéma commence à l'instant $t = t_a$, quand la tension $U_C(t)$ déterminée par (0.5) atteigne la valeur d'allumage de la lampe:

$$U_C(t = t_a) = V_a \implies E(1 - e^{-t_a/(RC)}) = V_a$$

- On pourra resoudre la dernière équation par rapport à $t_a$:

$$t_a = -RC \ln\left(1 - \frac{V_a}{E}\right). \tag{0.7}$$

- La condition initiale pour la solution (0.6) est:

$$U_C(t = t_a) = V_a \implies E\,\frac{r}{r+R} + \frac{\text{const}}{C} \cdot e^{-\frac{r+R}{rR}\frac{t_a}{C}} = V_a \implies$$

$$\text{const} = C\left(V_a - E\,\frac{r}{r+R}\right) e^{\frac{r+R}{rR}\frac{t_a}{C}}.$$

Quand on substitue la valeur de la constante trouvée dans la solution (0.6), on obtient

$$U_C(t) = E\,\frac{r}{r+R} + \left(V_a - E\,\frac{r}{r+R}\right) e^{-\frac{r+R}{rR}\frac{t-t_a}{C}}. \tag{0.8}$$

C'est une fonction decroissante. Par contre, une fois que la valeur $U_C(t) = V_e$ est atteinte (supposons que ça correspond à $t = t_e$), on doit revenir au schéma représenté sur la Fig. 3; ensuite quand la lampe s'allume, on revient au schéma sur la Fig. 4, etc. Donc le graphe de $U_C(t)$ a la forme suivante (Fig. 5):

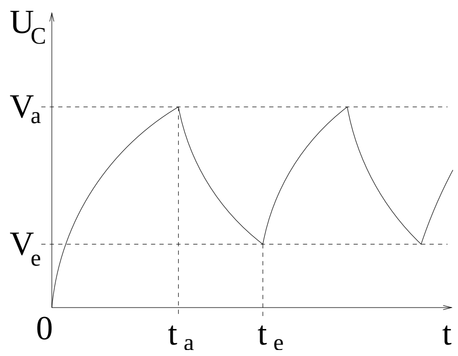


Fig. 5

Considérons maintenant les questions de l'exercice. Supposons que $r \to 0$, comme dans l'enoncé. Dans cette limite, l'exponentiel dans (0.8) decroit très rapidement (le temps caractéristique de la decroissance $\tau = \frac{rRC}{r+R}$ est très court), et donc on peut l'approximer par un segment d'une droite verticale (Fig. 6). Physiquement ça correspond à la décharge instantanée du condensateur (en effet, cette décharge dure le temps $\sim \tau$).

La période de $U_C(t)$ est égale à $T = t_a - t_x$ (voir la Fig. 5). On a déjà calculé $t_a$ (voir la formule (0.7); pour trouver $t_x$, il suffit de considérer la fonction (0.5) et de résoudre l'équation $U_C(t = t_x) = V_b$. Ça donne une formule analogue à (0.7):

$$t_x = -RC \ln\left(1 - \frac{V_e}{E}\right).$$

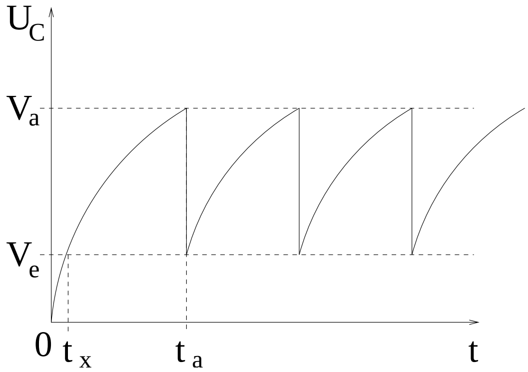


Fig. 3

Donc pour la période on obtient

$$T = t_a - t_x = RC \ln\left(1 - \frac{V_e}{E}\right) - RC \ln\left(1 - \frac{V_a}{E}\right) = RC \ln \frac{E - V_e}{E - V_a}\,.$$

Finalement, pour pouvoir considérer que la tension $U_C(t)$ est constituée de segments de droite, il faut qu'on puisse remplacer dans (0.5) l'exponentiel par son développement de Taylor:

$$e^{-t/(RC)} \approx 1 - \frac{t}{RC} + \ldots$$

On pourra garantir cette condition si $t_a \ll RC$, ce qui est équivalent à

$$-RC \ln\left(1 - \frac{V_a}{E}\right) \ll RC \implies -\ln\left(1 - \frac{V_a}{E}\right) \ll 1 \implies \ln \frac{E}{E - V_a} \ll 1 \implies$$

$$\implies \frac{E}{E - V_a} \approx 1 \implies \frac{E}{E - V_a} - 1 \to 0 \implies V_a \ll E.$$

Alors il suffit de demander que la tension d'allumage soit beaucoup plus petite que la tension du générateur.