L'idéologie de la résolution de ce genre d'exercices est la suivante:

1. Tout d'abord on écrit la balance des tensions (voir les exemples ci-dessous). D'habitude, elle donne une équation différentielle linéaire à coéfficients constants, non-homogène en général.
2. Pour resoudre cette équation:
   - On cherche la solution générale de l'équation homogène correspondante (par exemple, en passant par l'équation caractéristique).
   - Ensuite on cherche une solution particulière de l'équation non-homogène (sous la forme d'une constante si la non-homogeneité est une fonction constante, d'un polynome si c'est un polynome, d'une fonction périodique si c'est une fonction périodique etc). La somme des deux solutions donne la solution génerale de l'équation non-homogène.
   - A l'étape suivante nous déterminons la solution qui correspond à notre problème, en utilisant les conditions initiales.
3. En utilisant la solution trouvée, on répond aux questions de l'exercice.

Exercice 1

1. Considérons le circuit à l'instant $t \geq 0$. Notons q la charge sur le condensateur C_1 et x la charge sur C_2 (voir Fig. 1). Ces deux charges ne sont pas indépendantes,

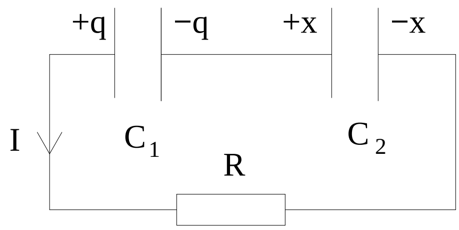

Fig. 1

puisque la charge totale dans chaque partie "connexe" du circuit est conservée. En particulier, on a

$$-q + x = -Q_0 \implies x = q - Q_0. \tag{0.1}$$

La balance des tensions s'écrit comme

$$U_{C_1} + U_{C_2} + U_R = 0,$$

alors

$$\frac{q}{C_1} + \frac{x}{C_2} = IR. \tag{0.2}$$

Remarquons aussi que pour la direction choisie de I le courant est déterminé par la charge qui a quitté le condensateur C_1 (autrement dit, I est positive quand q se diminue) et donc

$$I = -\frac{dq}{dt}\,. \tag{0.3}$$

En substituant (0.1) et (0.3) dans (0.2), on obtient l'équation suivante:

$$\frac{q}{C_1} + \frac{q - Q_0}{C_2} = -R\frac{dq}{dt}\,,$$

qu'on peut re-écrire sous la forme

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{R}\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\,q = \frac{Q_0}{RC_2}\,. \tag{0.4}$$

C'est une équation différentielle linéaire non-homogène de première ordre. Elle donne la réponse à la première question.

2. Ensuite on cherche la solution de cette équation:

   - La solution générale de l'équation homogène est déterminée par l'équation caractéristique

     $$\lambda + \frac{1}{R}\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{R}\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\,,$$

     d'où on trouve

     $$q_{hom}(t) = C\,e^{\lambda t} = C\,e^{-\frac{1}{R}\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\,t},$$

     (C est une constante arbitraire).

   - On cherche une solution particulière de l'équation non-homogène sous la forme d'une fonction constante:

     $$q_{part.non-hom.}(t) = D.$$

     En substituant cette relation dans l'équation (0.4), on voit que la constante D vérifie

     $$\frac{1}{R}\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\,D = \frac{Q_0}{RC_2}$$

     et donc

     $$D = Q_0\,\frac{C_1}{C_1 + C_2}\,.$$

     Alors la solution générale de l'équation non-homogène (0.4) est

     $$q(t) = q_{hom}(t) + q_{part.non-hom.}(t) =$$

     $$= Q_0\,\frac{C_1}{C_1 + C_2} + C\,e^{-\frac{1}{R}\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\,t}.$$

- Appliquons les conditions initiales. On sait que $q(t=0) = Q_0$, donc

$$Q_0 = C + Q_0 \, \frac{C_1}{C_1 + C_2} \implies C = Q_0 \, \frac{C_2}{C_1 + C_2} \, .$$

  Ça veut dire que la solution qui nous intéresse est donnée par

$$q(t) = Q_0 \, \frac{C_1}{C_1 + C_2} + Q_0 \, \frac{C_2}{C_1 + C_2} \, e^{-\frac{1}{R} \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \, t} \, .$$

3. De plus, en utilisant cette dernière relation et l'équation (0.3) on obtient l'intensité I:

$$I = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q_0}{RC_1} \, e^{-\frac{1}{R} \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \, t} \, .$$

Exercice 2

1. On remplace tout d'abord notre bobine par une bobine idéale de résistance nulle et d'inductance L, branchée en série avec une résistance R (voir Fig. 2). Ensuite on

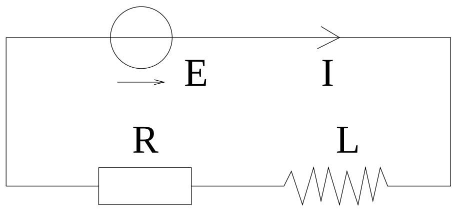

Fig. 2

considère la balance des tensions:

$$E = U_R + U_L \, .$$

Pour la résistance on a $U_R = IR$, pour la bobine $U_L = L \frac{dI}{dt}$, et donc on obtient l'équation différentielle suivante:

$$L \, \frac{dI}{dt} + IR = E. \tag{0.5}$$

2. L'équation caractéristique s'écrit sous la forme

$$L\lambda + R = 0 \implies \lambda = -\frac{R}{L} \, ,$$

et donc la solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$I_{hom}(t) = C \, e^{-\frac{R}{L} \, t}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme d'une constante:

$$I_{part.non-hom.} = D.$$

Cette constante (d'après (0.5)) doit vérifier

$$DR = E$$

et donc $D = \dfrac{E}{R}$. Alors la solution générale de l'équation non-homogène (0.5) est

$$I(t) = I_{hom}(t) + I_{part.non-hom.} = \frac{E}{R} + C\, e^{-\frac{R}{L}\,t}.$$

Les conditions initiales ($I(t=0)=0$) impliquent

$$0 = \frac{E}{R} + C \implies C = -\frac{E}{R}\,,$$

et alors

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\,t}\right).$$

3. Maintenant on pourra répondre aux questions de l'exercice:
   - Pour $t \to \infty$ (en effet, "longtemps après la fermeture" — dans notre cas ça veut dire que $t \gg \tau = \frac{L}{R}$) on a $I(t) \to I_{finale} = \dfrac{E}{R}$.
   - On cherche la solution de l'équation

     $$0.9 I_{finale} = I(t),$$

     donc

     $$0.9\frac{E}{R} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\,t}\right) \implies e^{-\frac{R}{L}\,t} = 0.1 \implies t = \frac{L}{R}\ln 10\,.$$
   - L'énergie du champ magnétique est donnée par

     $$E_B = \frac{LI^2}{2} = \frac{L(0.9I_{finale})^2}{2} = 0.405\,\frac{LE^2}{R^2}\,.$$
   - Finalement, si la résistance du générateur n'est pas négligeable, il suffit de remplacer $R \mapsto R + r$ dans toutes les formules ci-dessus.

Exercice 3

1. On a trois intensités inconnues, donc on a besoin de trois équations. Une est donnée par l'équation de Kirchhoff dans un des noeuds:

$$i = i_1 + i_2. \tag{0.6}$$

Une deuxième équation est fournie par la loi de maille pour la maille contenant L et R:

$$i_1 R_1 = U_{R_1} = U_L = L\,\frac{di_2}{dt}\,. \tag{0.7}$$

Troisième équation correspond à la maille qui contient E, L et R:

$$E = U_L + U_R \implies E = L\,\frac{di_2}{dt} + iR. \tag{0.8}$$

Maintenant, grâce aux équations (0.7)–(0.8), on pourra exprimer i_1 et i en fonction de i_2 (la réponse à la question 2):

$$i_1 = \frac{L}{R_1}\frac{di_2}{dt}, \tag{0.9}$$

$$i = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{di_2}{dt}. \tag{0.10}$$

En substituant les deux dernières relations dans (0.6), on trouve une équation différentielle pour i_2:

$$L\frac{R+R_1}{RR_1}\frac{di_2}{dt} + i_2 = \frac{E}{R}\,. \tag{0.11}$$

2. L'équation caractéristique correspondante:

$$L\frac{R+R_1}{RR_1}\,\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = -\frac{RR_1}{L(R+R_1)}\,,$$

donc

$$\Big(i_2(t)\Big)_{hom} = C\,e^{\lambda t} = C\,e^{-\frac{RR_1}{L(R+R_1)}t}.$$

Une solution particulière de l'équation non-homogène on cherche toujours sous la forme d'une fonction constante:

$$\Big(i_2(t)\Big)_{part.non-hom} = D.$$

Cette constante doit alors vérifier l'équation

$$D = \frac{E}{R}\,.$$

Ensuite on considère la solution générale de (0.11)

$$i_2(t) = \Big(i_2(t)\Big)_{hom} + \Big(i_2(t)\Big)_{part.non-hom} = \frac{E}{R} + C\,e^{-\frac{RR_1}{L(R+R_1)}t}.$$

En utilisant les conditions initiales ($i_2(t=0)=0$) on obtient

$$0 = \frac{E}{R} + C \implies C = -\frac{E}{R}.$$

Donc finalement on a

$$i_2(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{RR_1}{L(R+R_1)}t}\right).$$

De plus, en utilisant (0.9) et (0.10) nous obtenons

$$\begin{aligned}
i_1 &= \frac{L}{R_1}\frac{di_2}{dt} = \frac{E}{R+R_1}\, e^{-\frac{RR_1}{L(R+R_1)}t}, \\
i &= \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{di_2}{dt} = \frac{E}{R}\left(1 - \frac{R_1}{R+R_1}\, e^{-\frac{RR_1}{L(R+R_1)}t}\right).
\end{aligned}$$

Notons que $i_1(t=0) = i(t=0) = \dfrac{E}{R+R_1} \neq 0$, alors ces deux intensités subissent une discontinuité au moment de la fermeture du circuit. Ce n'est pas le cas de i_2. En effet, i_2 doit être continue: sinon, la dérivée $\dfrac{di_2}{dt}$ et (par conséquent) la tension U_L deviennent infinies, ce qui est impossible.