Exercice 1

1) L'algorithme de l'application de la méthode matricielle est le suivant:

1. Tout d'abord il faut fixer les mailles en lesquelles on décomposera le circuit. Il faut aussi fixer la direction du courant dans chaque maille (cette direction peut être choisie arbitrairement; si elle n'est pas "bonne", le résultat final pour le courant concerné aura un signe "$-$").

2. Ensuite on calcule la matrice des résistances. Pour N mailles, ce sera une matrice R de taille $N \times N$. Ses élements diagonaux R_{ii} ($i = 1, 2, \ldots, N$) sont donnés par

$$R_{ii} = \sum \text{résistances dans la maille numéro } i.$$

Pour les élements R_{ij} hors la diagonale (donc $i \neq j$):

$$R_{ij} = \sum (\pm) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{résistances qui appartiennent simultanément} \\ \text{à la maille } i \text{ et à la maille } j \end{array} \right)$$

On choisit le signe "$+$" si les directions des courants dans les mailles i et j (à travers la résistance considérée) coïncident. Si les directions sont opposées, on prends le signe "$-$".

3. On trouve la matrice E (une colonne de taille $1 \times N$) des tensions des générateurs. Ses élements E_i ($i = 1, 2, \ldots N$) s'écrivent comme

$$E_i = \sum (\pm) \text{ f.e.m. dans la maille } i$$

Comme avant, on choisit le signe "$+$" si la direction du courant dans la maille coïncide avec la direction de la f.e.m. en question, et le signe "$-$" si ces directions sont opposées.

4. Ensuite il faut resoudre le système d'équations linéaires

$$R\,I = E,$$

et trouver I, oừ I note la matrice des courants (une colonne de taille $1 \times N$). En général, cette dernière matrice nous permettra de répondre, plus oú moins facilement, aux questions posées dans l'exercice.

Appliquons maintenant cet algorithme à l'Ex.1:

1. On décompose notre circuit en trois mailles et on fixe les directions des courants comme présenté sur la Fig. 1b.

2. Calculons la matrice des résistances R. On trouve

$$\begin{aligned} R_{11} &= 3 + 1 + 2 + 1 = 7, \\ R_{12} &= R_{21} = -3, \\ R_{13} &= R_{31} = -1, \\ R_{22} &= 1 + 2 + 3 + 2 = 8, \\ R_{23} &= R_{32} = -2, \\ R_{33} &= 2 + 1 + 3 = 6, \end{aligned}$$

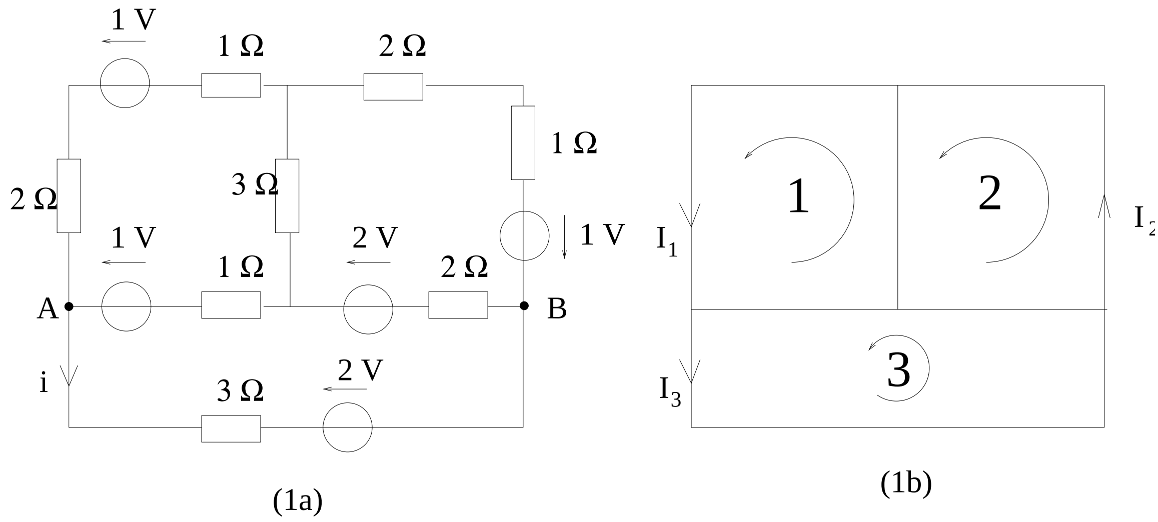

Fig. 1

et donc la matrice R s'écrit sous la forme

$$R = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Les élements de la matrice des f.e.m. sont donnés par

$$\begin{aligned} E_1 &= 1 - 1 = 0, \\ E_2 &= -2 - 1 = -3, \\ E_3 &= 2 + 1 - 2 = 1. \end{aligned}$$

et donc

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. On obtient alors le système suivant:

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sa solution donne:

$$I_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -3 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \Big/ \det \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \big(\text{ après le calcul } \big) = \frac{(-46)}{234},$$

$$I_2 = \det\begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Big/ \det\begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{(-106)}{234},$$

$$I_3 = \det\begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Big/ \det\begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{(-4)}{234}.$$

En effet, la valeur de I_3 nous permet de répondre à toutes questions de l'exercice:

$$i = I_3 = -\frac{2}{117}.$$

$$3I_3 + (\varphi_B - \varphi_A) = -2 \implies \varphi_A - \varphi_B = 2 + 3I_3 = \frac{76}{39}\ V.$$

2) L'algorithme de l'application des équations de Kirchhoff:

1. On introduit une notation pour les intensités de courant dans chaque partie du circuit (on pourra choisir les directions arbitraires).

2. Si le circuit contient N noeuds, on écrit les équations de Kirchoff ($\sum$ courants dans un noeud $= 0$) en $N-1$ noeuds. Ces $N-1$ noeuds, eux aussi, peuvent être choisit arbitrairement.

3. De plus, on écrit les équations de maille (la somme des tensions = la somme des f.e.m). Le nombre de ces équations doit être suffisant pour pouvoir déterminer les courants, donc: ce nombre + $(N-1)$ doit être égal au nombre des intensités inconnues.

4. Les étapes 2 et 3 donnent un système d'équations linéaires pour les intensités. Ensuite il faut resoudre ce système et repondre aux questions de l'exercice.

Appliquons cette méthode à notre cas:

1. On note les intensités comme indiqué sur la Fig. 2.

2. Nous avons 4 noeuds. Alors il suffit d'écrire les équations de Kirchhoff en 3 noeuds, par exemple, en A, B et C:

$$\text{en A:} \quad I_3 = I_1 + I_6, \tag{0.1}$$
$$\text{en B:} \quad I_3 = I_2 + I_4, \tag{0.2}$$
$$\text{en C:} \quad I_1 = I_2 + I_5. \tag{0.3}$$

3. Nous avons 6 intensités inconnues. Alors il suffit de considérer 3 mailles. Par exemple, on pourra encore considérer les mailles 1, 2 et 3, représentées sur la Fig. 1b. On obtient les équations suivantes:

$$\text{pour la maille 1:} \quad -1\cdot I_6 + 3\cdot I_5 + (1+2)\cdot I_1 = 1 - 1 = 0, \tag{0.4}$$
$$\text{pour la maille 2:} \quad (1+2)\cdot I_2 - 3\cdot I_5 - 2\cdot I_4 = -2 - 1 = -3, \tag{0.5}$$
$$\text{pour la maille 3:} \quad 2\cdot I_4 + 1\cdot I_6 + 3\cdot I_3 = 2 + 1 - 2 = 1. \tag{0.6}$$

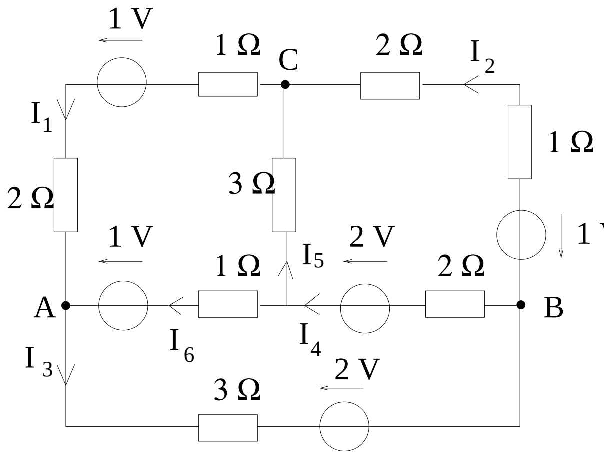

Fig.2

4. Nous avons 6 inconnues $I_1 \ldots I_6$ et 6 équations. Pour résoudre ce système, on va exprimer I_4, I_5, I_6 en fonction de I_1, I_2, I_3, en utilisant les équations de Kirchhoff (0.1)–(0.3):

$$\begin{aligned} I_4 &= I_3 - I_2, \\ I_5 &= I_1 - I_2, \\ I_6 &= I_3 - I_1. \end{aligned}$$

Ensuite, en substituant ces relations en (0.4)–(0.6), on obtient:

$$\begin{aligned} -(I_3 - I_1) + 3(I_1 - I_2) + 3I_1 &= 0, \\ 3I_2 - 2(I_3 - I_2) - 3(I_1 - I_2) &= -3, \\ 2(I_3 - I_2) + (I_3 - I_1) + 3I_3 &= 1. \end{aligned}$$

Simplifions ces dernières équations:

$$\begin{aligned} 7I_1 - 3I_2 - I_3 &= 0, \\ -3I_1 + 8I_2 - 2I_3 &= -3, \\ -I_1 - 2I_2 + 6I_3 &= 1. \end{aligned}$$

On peut écrire ce système sous la forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors on a obtenu exactement le même système qu'à l'étape 4 de la première méthode. Donc la suite est complétement identique à cette étape. (Remarque: pour un autre choix des noeuds et des mailles on obtient en général un système différent; mais ce système aura bien sûr les mêmes solutions).

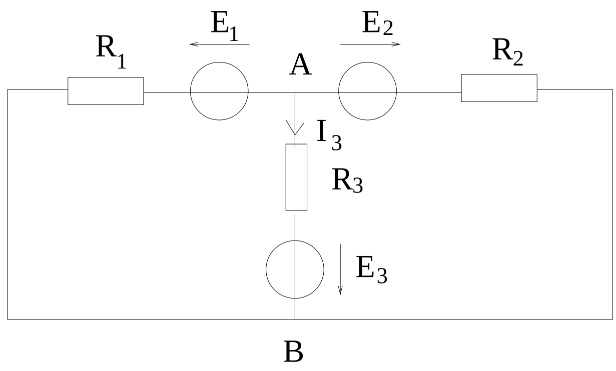

Fig. 3

Exercice 2.
1) Considérons le sous-système contenu entre les points A et B (il est composé de R_3 et E_3: voir Fig. 3). L'idée du théorème de Thevenin est qu'on peut remplacer la partie *exterieure* à ce sous-système par une résistance et une f.e.m. équivalente (voir Fig. 4).

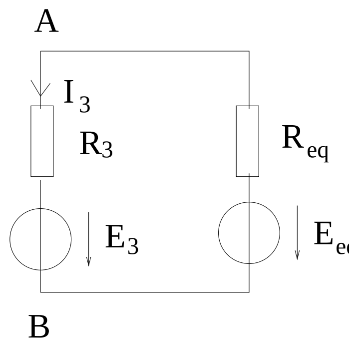

Fig. 4

Donc l'intensité de courant traversant R_3 est donnée par

$$I_3 = \frac{E_3 - E_{eq}}{R_3 + R_{eq}} \,. \tag{0.7}$$

D'après le théorème de Thevenin:

- pour trouver la résistance équivalente, il faut: 1) supprimer la partie intérieure 2) dans la partie exterieure, supprimer les f.e.m. 3) brancher aux points A et B un générateur imaginaire. Dans notre cas, ça donne la Fig. 5.

  Donc la résistance R_{eq} coïncide avec la résistance équivalente des deux résistances R_1 et R_2, branchées en dérivation:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \,. \tag{0.8}$$

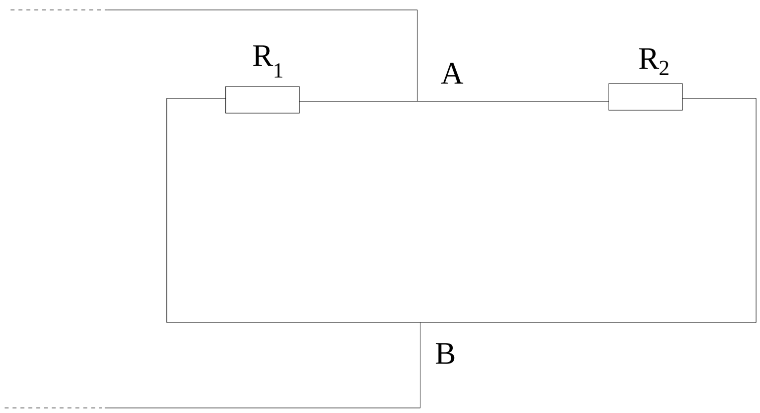

Fig. 5

- pour déterminer E_{eq}, il faut supprimer la partie intérieure et ensuite calculer la d.d.p. entre A et B. Dans notre cas, ça donne la Fig. 6:

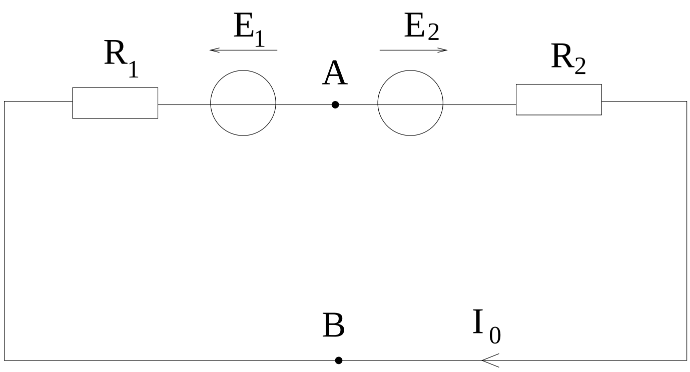

Fig. 6

Pour trouver $U_{AB} = E_{eq}$, notons I_0 l'intensité de courant dans le circuit représenté sur la Fig. 6 (attention! ce n'est pas un vrai courant, et il n'a rien à voir avec le schéma initial sur la Fig. 3; c'est plutot une quantité auxiliaire qu'on introduit pour déterminer E_{eq}). On a

$$I_0 = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2}\,.$$

De plus, comme

$$U_{AB} + I_0 R_2 = E_2,$$

alors

$$E_{eq} = U_{AB} = E_2 - I_0 R_2 = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}\,. \tag{0.9}$$

Finalement, en remplaçant (0.8) et (0.9) en (0.7), on trouve

$$I_3 = \frac{E_3(R_1 + R_2) - E_1 R_2 - E_2 R_1}{R_3(R_1 + R_2) + R_1 R_2}\,.$$

2) Appliquons maintenant la méthode matricielle selon l'algorithme présenté dans l'Ex. 1.

1. On décompose notre circuit en deux mailles et on fixe les directions des courants comme indiqué sur la Fig. 7.

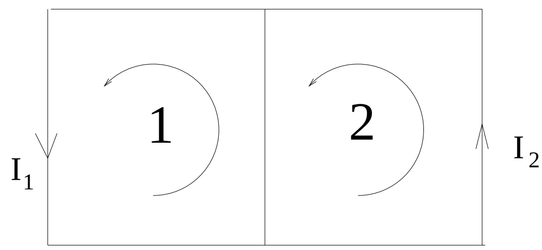

Fig. 7

2. La matrice des résistances (il y a 2 mailles, donc elle est de taille 2×2) s'écrit alors comme ceci:
$$R = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix}.$$

3. De façon analogue, on trouve la matrice des f.e.m.:
$$E = \begin{pmatrix} E_1 - E_3 \\ E_3 - E_2 \end{pmatrix}.$$

4. On obtient donc le système suivant:
$$\begin{pmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 - E_3 \\ E_3 - E_2 \end{pmatrix}.$$
Sa solution donne
$$I_1 = \det \begin{pmatrix} E_1 - E_3 & -R_3 \\ E_3 - E_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \Big/ \det \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{E_1(R_2 + R_3) - E_2 R_3 - E_3 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3},$$
$$I_2 = \det \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & E_1 - E_3 \\ -R_3 & E_3 - E_2 \end{pmatrix} \Big/ \det \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{E_1 R_3 + E_3 R_1 - E_2(R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$
De plus, on pourra écrire l'équation de Kirchhoff en un des deux noeuds, et cette équation (+ deux dernières relations) nous donne
$$I_3 = I_2 - I_1 = \frac{E_3(R_1 + R_2) - E_1 R_2 - E_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$