TD 1

Ex. 1 a).

$$\vec{j} = n e \langle \vec{v} \rangle$$

vitesse moyenne des électrons

densité de courant

concentration volumique

La moyenne se calcule sur tout le parcours, donc on peut moyenner sur la partie de la trajectoire entre 2 chocs consécutifs et ensuite sur toutes ces parties.

<u>entre 2 chocs consécutifs:</u>

RFD : $$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}$$

il n'y a qu'une seule force (électrique), égale à $e\vec{E}$ $\Longrightarrow$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}$$

C'est une équation différentielle de 1er ordre pour $\vec{v}(t)$. Sa solution générale est

$$\vec{v}(t) = \frac{e\vec{E}}{m} t + \vec{C}$$

un vecteur constant

Conditions initiales:

$$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{C} = \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{e\vec{E}}{m} t$$

Comme la durée moyenne entre 2 chocs $= \tau$, la vitesse (moyenne) ~~[illegible]~~ avant le 2ème choc est égale à

$$\vec{v}(t=\tau) = \vec{v}_0 + \frac{e\vec{E}}{m} \tau$$

La vitesse moyenne sur la partie du parcours entre 2 chocs est donc

$$\langle \vec{v} \rangle_{\text{entre 2 chocs}} = \frac{\vec{v}(t=0) + \vec{v}(t=\tau)}{2} = \vec{v}_0 + \frac{e\tau}{2m} \vec{E}$$

La vitesse moyenne sur tout le parcours

$$\langle \vec{v} \rangle = \left\langle \langle \vec{v} \rangle_{\text{entre 2 chocs}} \right\rangle_{\text{parcours}} =$$

$$= \left\langle \vec{v}_0 + \frac{e\tau}{2m} \vec{E} \right\rangle_{\text{parcours}}$$

D'autre part, $\frac{e\tau}{2m}\vec{E}$ est une constante (même valeur pour chaque partie de la trajéctoire et $\langle \vec{v}_0 \rangle_{\text{parcours}} = \vec{0}$ (car $\vec{v}_0$ est aléatoire en module et direction). Alors

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{e\tau}{2m}\vec{E} \Rightarrow \vec{j} = ne \cdot \frac{e\tau}{2m}\vec{E} = \frac{ne^2\tau}{2m}\vec{E}$$

d'où on obtient $\sigma = \frac{ne^2\tau}{2m}$.

b). La RFD décrivant le mouvement des électrons:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} = \underbrace{e\vec{E}}_{\text{force électrique}} + \underbrace{(-k\vec{v})}_{\text{force de frottement}}$$

En composantes:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = eE_x - kv_x & (A) \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = eE_y - kv_y & (B) \\ m\dfrac{dv_z}{dt} = eE_z - kv_z & (C) \end{cases}$$

Prenons par exemple la 1ère équation. C'est une équation différentielle linéaire non-homogène pour $v_x(t)$, à coefficients constants.

solution générale de l'éq. non-homogène = (I) solution générale de l'éq. homogène correspondante + (II) une solution quelconque de l'éq. non-hom.

I| $m\frac{dv_x}{dt} + kv_x = 0 \Rightarrow$ éq. caractéristique $m\lambda + k = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{k}{m}$

sol. gén. de l'éq. homogène $= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{une constante}}}{C_x} e^{-\frac{k}{m}t}$

II| le membre de droite est une const $\Rightarrow$ on cherche une solution particulière comme $v_x(t) = D_x$ (const)

Alors

$$m\underbrace{\frac{dD_x}{dt}}_{=0} + kD_x = eE_x \Rightarrow D_x = \frac{eE_x}{k}$$

D'après I| et II|:

solution générale de (A): $v_x(t) = \frac{eE_x}{k} + C_x e^{-\frac{k}{m}t}$

De la même manière :

$$v_y(t) = \frac{eE_y}{k} + C_y e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v_z(t) = \frac{eE_z}{k} + C_z e^{-\frac{k}{m}t}$$

ou, sous la forme vectorielle :

$$\vec{v}(t) = \frac{e\vec{E}}{k} + \vec{C} e^{-\frac{k}{m}t}$$

un vecteur constant qui dépend des conditions initiales

Si on note $\tau = \frac{m}{k}$, alors $e^{-t/\tau} = e^{-kt/m} \to 0$ pour t suffisamment grand. Dans ce cas donc :

$$\vec{v}(t \gg \tau) \approx \frac{e\vec{E}}{k},$$

d'où $\vec{j} = ne\langle\vec{v}\rangle = ne \cdot \frac{e\vec{E}}{k} = \frac{ne^2}{k}\vec{E} \Rightarrow \sigma = \frac{ne^2}{k}$.

Ex. 2 | 1). • densité volumique des charges = concentration volumique des électrons × la charge d'un électron

$$\rho = n_e e$$

• chaque atome fournit un électron $\Rightarrow$

$n_e = n_a$ (concentration volumique des atomes)

• n_a = nombre d'atomes dans $1\,m^3$ = $\dfrac{\text{masse d'un metre}^3}{\text{masse d'un atome}}$

• masse de $1\,m^3$ = 10500 kg $(= 10^3 \cdot \mu)$

• masse d'un atome = $\dfrac{\text{masse de 1 mole}}{\text{nombre d'atomes dans 1 mole}}$ $= 108 \cdot 10^{-3}$ kg, $= N_A$

Donc

$$n_a = \frac{10500\ kg/m^3}{108 \cdot 10^{-3}/6 \cdot 10^{23}\ kg}$$

et finalement

$$\rho \approx \frac{10500}{108 \cdot 10^{-3}} \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \frac{C}{m^3} \approx 10^{10}\ \frac{C}{m^3}$$

2). $j =$ la densité de courant $= \dfrac{I}{S} = \dfrac{I}{\ell \cdot a} = \dfrac{10}{12{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}2\cdot 10^{-3}} \approx 4\cdot 10^{6}\ \dfrac{A}{m^2}$

$j = \gamma E \Rightarrow E = \dfrac{j}{\gamma} = \dfrac{4\cdot 10^{6}}{6{,}7\cdot 10^{7}} \approx 0{,}06\ \dfrac{N}{C}$

le champ électrique

3). $j = \rho\, v \Rightarrow v = \dfrac{j}{\rho} = \dfrac{4\cdot 10^{6}}{10^{10}} \approx 4\cdot 10^{-4}\ \dfrac{m}{s}$.

vitesse moyenne des charges

$v = x E \Rightarrow x = \dfrac{v}{E} = \dfrac{j}{\rho E} = \dfrac{\gamma E}{\rho E} = \dfrac{\gamma}{\rho} \approx$

mobilité

$\approx \dfrac{6{,}7\cdot 10^{7}}{10^{10}} \approx 6{,}7\cdot 10^{-3}\ \dfrac{m\cdot C}{s\cdot N}$

4).

puissance volumique dissipée $P = \dfrac{U\cdot I}{V} = \dfrac{I^2 R}{V} =$

résistance

volume du conducteur

(car $\rho = \frac{1}{\gamma}$)

résistivité

$= \dfrac{I^2\cdot \rho \frac{L}{a\cdot \ell}}{a\cdot \ell\cdot L} = \dfrac{I^2 \rho}{a^2 \ell^2} = \dfrac{I^2}{\gamma a^2 \ell^2} \approx$

longueur du conducteur

$\approx \dfrac{10^2}{6{,}7\cdot 10^{7}\cdot 0{,}2^2\cdot 10^{-6}\cdot 12{,}5^2\cdot 10^{-6}} \approx 2{,}4\cdot 10^{5}\ \dfrac{W}{m^3}$

Exercice III

1). $R_0 = \rho \dfrac{\ell_0}{\pi D^2/4} = \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{na}{\pi D^2/4}$

l'aire de la section circulaire

résistivité $= 1/\sigma$

Donc $D^2 = \dfrac{4na}{\pi\sigma R_0} \Rightarrow D = 2\sqrt{\dfrac{na}{\pi\sigma R_0}} \approx$

$\approx 2\sqrt{\dfrac{\cancel{10}\cdot\cancel{10}\cdot 10^{-3}}{3{,}14\cdot 10^{6}\cdot\cancel{100}}}\ m \approx 3{,}6\cdot 10^{-5}\ m$

2). Sous contrainte, le volume reste constant $\Rightarrow$

$$(\ell_0+\Delta\ell)(S_0+\Delta S) = \ell_0 S_0$$

$$\ell_0 S_0 + \ell_0 \Delta S + S_0 \Delta \ell + \Delta\ell \Delta S \Rightarrow \ell_0\Delta S + S_0\Delta\ell + \Delta\ell\Delta S = 0$$

Donc, en divisant par $\ell_0 S_0$, on obtient

$$\frac{\Delta S}{S_0} + \frac{\Delta \ell}{\ell_0} + \underbrace{\frac{\Delta S}{S_0}\frac{\Delta \ell}{\ell_0}}_{\to 0} = 0$$

$\to 0$ (négligeable par rapport aux 2 premiers termes)

(*) $$\frac{\Delta S}{S_0} \approx -\frac{\Delta \ell}{\ell_0}$$

D'autre part

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{R-R_0}{R_0} = \frac{\rho\frac{\ell_0+\Delta\ell}{S+\Delta S} - \rho\frac{\ell_0}{S_0}}{\rho\frac{\ell_0}{S_0}} = \frac{S_0(\ell_0+\Delta\ell) - \ell_0(S+\Delta S)}{(S_0+\Delta S)\cancel{S_0}\cdot\frac{\ell_0}{\cancel{S_0}}} =$$

$$= \frac{S_0\Delta\ell - \ell_0\Delta S}{\ell_0(S_0+\Delta S)} = \frac{\frac{\Delta\ell}{\ell_0} - \frac{\Delta S}{S_0}}{1+\underbrace{\frac{\Delta S}{S_0}}_{\to 0}} \approx$$

(négligeable par rapport à 1)

$$\approx \frac{\Delta \ell}{\ell_0} - \frac{\Delta S}{S_0} \approx 2\frac{\Delta\ell}{\ell_0}$$

(grâce à (*))

Comme en plus $\frac{\Delta\ell}{\ell_0} = k_1 F$, on a

$$\frac{\Delta R}{R_0} \approx 2\frac{\Delta\ell}{\ell_0} = 2k_1F \Rightarrow K_2 = 2K_1.$$

Exercice 4

1). densité de courant $j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi D^2/4} \approx \frac{50\cdot 4}{3{,}14\cdot 1{,}63^2\cdot 10^{-6}} \approx 2{,}4\cdot 10^7\ \frac{A}{m^2}$

2). $\rho(20°C) = \rho_0(1+\alpha\cdot 20) \Rightarrow \rho_0 = \frac{\rho(20°C)}{1+\alpha\cdot 20}$

$$\rho(35°C) = \rho_0(1+\alpha\cdot 35) = \rho(20°)\frac{1+\alpha\cdot 35}{1+\alpha\cdot 20} \approx 1{,}7\cdot 10^{-8}\cdot\frac{1+35\cdot 3{,}9\cdot 10^{-3}}{1+20\cdot 3{,}9\cdot 10^{-3}}$$

$$\approx 1{,}79\cdot 10^{-8}\ \Omega\cdot m.$$

3). $\sigma = \frac{1}{\rho(35°)} \approx \frac{1}{1,79 \cdot 10^{-8}} \approx 0,56 \cdot 10^{8}\ \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$.

$\uparrow$

conductivité

4). On sait que $j = \sigma E \Rightarrow E = \frac{j}{\sigma} \approx \frac{2,4 \cdot 10^{7}}{0,56 \cdot 10^{8}} \approx 0,43\ \frac{N}{C}$

5). Si on nous donne la longueur du fil, on pourrait calculer 1). sa résistance

$$R = \rho(35°) \frac{L}{\pi D^2/4}$$

et donc 2). la tension appliquée au fil $U = IR$, ainsi que 3). la puissance dissipée dans ce fil $P = UI$.